B)Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

a, b, c $\in$ R, a $\neq$ 0, b $\neq$ 0 ve x ile y bilinmeyenler olmak üzere,

$$ax + by + c = 0$$

şeklindeki denkleme "birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem" denir. Bu denklemi sağlayan x ve y değerlerinin oluşturduğu (x, y) ikilileri bu denklemin bir çözümü olup, denklemin çözüm kümesinin elemanlarıdır.

İki bilinmeyenli birinci dereceden bir denklemin tek çözümünün olabilmesi için, en az iki tane denkleme ihtiyaç vardır.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

a, b, c, d, e, f $\in$ R olmak üzere,

$$ax+by+c=0$$
$$dx+ey+f=0$$

şeklindeki iki denkleme "”birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi" denir.

Bu sistemdeki her bir denklemin x ve y bilinmeyenlerinin katsayılarından en az biri sıfırdan farklı olmalıdır.

Sistemin çözümü demek, her iki eşitliği de sağlayan bir (x, y) sıralı ikilisi bulmak demektir.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerinin Çözümü

Yok Etme Metodu

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulmak için her iki denklemde yer alan değişkenlerden biri yok edilmeye çalışılır. Yok etme işlemi ancak bu iki değişkenden birinin her iki denklemde de katsayılarının zıt işaretli olarak eşitlenip toplanmasıyla mümkündür. Böylelikle, bilinmeyenlerin biri bulunmuş olur.

Diğer bilinmeyeni bulmak için de, bulduğumuz ilk değişken değerini verilen denklem sisteminde yer alan iki denklemden birinde yerine yazarız. Böylece elde ettiğimiz iki bilinmeyene karşılık gelen değerler, (x, y) çözümünü ve (x, y) çözümü de denklem sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

Örnek: $\left.\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ x-2y=4 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümü nedir?

çözüm:

1.yol: Birinci denklemin her iki tarafını -2 ile çarpıp, elde ettiğimiz denklemi ikinci denklem ile toplarsak:

$$2x-y=-1 \Rightarrow -4x+2y=2$$

$$\begin{array}{rl} & -4x+2y=2 \\ + & x-2y=4 \\ \hline & -3x=6 \\ & x=-2 \end{array}$$

bulunur (Bu durumda denklemlerde bulunan y' li terimleri yok ederek önce x değerini bulmuş olduk). Bulduğumuz x= -2 değerini soruda verilen iki denklemden birinde yerine yazarsak:

$$\begin{aligned} x-2y=4 \Rightarrow -2-2y&=4 \\ -2y&=6 \\ y&=-3 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, verilen denklem sisteminin çözümü (x, y)=(-2,-3) noktasıdır.

2.yol: İkinci denklemin her iki tarafını -2 ile çarpıp, elde etiğimiz denklemi birinci denklem ile toplarsak:

$$x-2y=4 \Rightarrow -2x+4y=-8$$

$$\begin{array}{rl} & 2x-y=-1 \\ + & -2x+4y=-8 \\ \hline & 3y=-9 \\ & y=-3 \end{array}$$

bulunur(Bu durumda da denklemlerde bulunan x' li terimleri yok ederek önce y değerini bulmuş olduk).. Bulduğumuz y= -3 değerini verilen denklem sistemindeki denklemlerden birinde yerine yazarsak:

$$2x-y=-1 \Rightarrow 2x-(-3)=-1$$
$$2x+3=-1$$
$$2x=-4$$
$$x=-2$$

bulunur. O halde, verilen denklem sisteminin çözümü bu yolla da (x,y)= (-2,-3) olarak bulunmuş olur.

Örnek: $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=2 \\ 2x-3y=4 \end{array}\right\}$ denklem sisiteminde x+y kaçtır?

çözüm:

<u>1.yol:</u>Verilen denklem sisteminde birinci denklemin her iki tarafını -3, ikinci denklemin her iki tarafını 2 ile çarparsak ve elde ettiğimiz denklemleri taraf tarafa toplarsak:

$$-3/\ 3x-2y=2 \Rightarrow \quad -9x+6y=-6$$
$$2/\ 2x-3y=4 \Rightarrow \quad +\ \ 4x-6y=8$$

$$-5x=2$$
$$x=-\frac{2}{5}$$

elde edilir. $x=-\frac{2}{5}$ değerini birinci denklemde yerine yazarsak(veya ikinci denklemde de yazılabilir);

$$3x-2y=2 \Rightarrow 3.\left(-\frac{2}{5}\right)-2y=2$$
$$-\frac{6}{5}-2y=2$$
$$-2y=2+\frac{6}{5}$$
$$-2y=\frac{16}{5}$$
$$y=-\frac{8}{5}$$

buluruz. Buradan da ;

$$x+y=-\frac{2}{5}-\frac{8}{5}=-\frac{10}{5}=-2$$ sonucuna ulaşırız.

2.yol: Verilen denklem sistemindeki denklemlerden ikinciyi -1 ile çarpıp birinci denklem ile toplarsak;

$$2x-3y=4 \Rightarrow -2x+3y=-4$$

$$\begin{array}{rr} & 3x-2y=2 \\ \hline + & -2x+3y=-4 \\ & x+y=-2 \end{array}$$

olarak pratik şekilde bulunmuş olur.

C) İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

$a,b,c \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2+bx+c=0$$

şeklindeki denklemlere "ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem" denir.

Denklemi sağlayan x değerlerine "denklemin kökleri", tüm köklerin oluşturduğu kümeye "denklemin çözüm kümesi" , çözüm kümesini bulma işlemine de "denklemin çözümü(denklemi çözme)" denir.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde, $\Delta = b^2-4ac$ ifadesine "denklemin diskriminantı" denir. Böyle ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin çözümünün olması Δ' nın işaretine bağlıdır.

I.Durum: $\Delta>0 \Rightarrow$ Denklemin birbirinden farklı iki reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

şeklindedir. Buradan çözüm kümesi; Ç.K= $\{x_1, x_2\}$ olarak ifade edilir.

II.Durum: $\Delta=0 \Rightarrow$ Denklemin birbirine eşit(çakışık) iki reel kökü vardır. Bu kökler,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

şeklindedir. Buradan çözüm kümesi, Ç.K= $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ olarak ifade edilir.

III. Durum: $\Delta<0 \Rightarrow$ Denklemin reel kökü yoktur. Yani, denklemin reel sayılarda çözüm kümesi, Ç.K= $\varnothing$'dir.

Örnek: $x^2+5x-14=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

çözüm: Verilen denklemde a=1, b=5 ve c= -14' tür. Buradan,

$$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow \Delta=5^2-4.1.(-14)=25+56=81>0$$

elde edilir. $\Delta=81>0$ olduğundan, denklemin farklı iki reel kökü vardır. Bu kökler;

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{81}}{2.1}=\frac{-5+9}{2}=2$$

ve

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{81}}{2.1}=\frac{-5-9}{2}=-7$$

olarak bulunur. O halde, denklemin çözüm kümesi, Ç.K= $\{-7, 2\}$ olarak elde edilir.

Örnek: $9x^2-6x+1=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

çözüm: Verilen denklemde a=9, b= -6, c=1'dir.

$$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-6)^2-4.9.1=36-36=0$$

bulunur. $\Delta=0$ olduğundan denkleminin birbirine eşit iki reel kökü vardır. Bu kökler;

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{2.9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur. Buradan denklemin çözüm kümesi, Ç.K=$\left\{\frac{1}{3}\right\}$ olarak elde edilir.

Örnek: $x^2+x+2=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

çözüm: Verilen denklemde a=1, b=1, c=2'dir.

$$\Delta = b^2\text{-}4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.1.2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

olduğundan, denklemin reel sayılarda çözümü yoktur. Yani, denklemin reel kökü yoktur. O halde, denklemin çözüm kümesi, Ç.K= $\varnothing$'dir.

NOT: Verilen denklem çarpanlarına ayrılabiliyorsa, denklemi çarpanlarına ayırarak çözmek daha pratiklik sağlar.

--------------------------0-------------------------