ÇARPANLARA AYIRMA VE ÖZDEŞLİKLER

Çok terimli bir ifadeyi iki ya da daha çok ifadenin çarpımı şeklinde yazmaya "çarpanlara ayırma" denir.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

1)Ortak Çarpan Parantezine Alma

Çok terimli ifadenin her teriminde ortak bir çarpan varsa, ifade onun parantezine alınarak çarpanlar bulunur.

Terimlerdeki ortak çarpanlar belirlenirken; katsayıların içindeki çarpanlardan aynı olanları ve aynı değişkenlerin üssü küçük olan kısımları ortak çarpan olarak alınıp parantezin dışına yazılır. Terimlerden geriye kalanlar da ayrı bir parantezde belirtilir.

Örnek: $9x^2-6x=3x(3x-2)$

$x^5+2x^3=x^3(x^2+2)$

$12x^2y^3-6x^3y^2+3x^2y=3x^2y(4y^2-2xy+1)$

$(a+2)^3-2(a+2)^2=(a+2)^2.(a+2-2)=(a+2)^2.a$

2) Gruplandırma Yöntemi

Verilen çok terimli ifadenin her teriminde ortak çarpan yoksa, terimler ikişerli ya da daha fazla gruplara ayrılarak bu gruplar içerisinde ortak çarpan bulunmaya çalışılır. Önemli olan grupları oluştururken gruplarda ortak terimler oluşacak şekilde davranmaktır.

Örnek: ax+ay+az+bx+by+bz ifadesini çarpanlarına ayırınız.

çözüm: Görüldüğü gibi çok terimli ifadenin her teriminde ortak çarpan yoktur. Fakat bazı grupları oluşturduğumuzda grupların kendi içlerinde ortak çarpanlar olduğunu görürüz.

1.yol: Verilen çok terimli ifadede a' lı terimleri bir grup, b' li terimleri diğer grup olarak alırsak:

$ax+ay+az+bx+by+bz=a(x+y+z)+b(x+y+z)$

elde edilir. Yani, verilen çok terimli ifade, iki terimli ifadeye dönüşmüş olur. Bu durumdaki yazılışta da (x+y+z) ifadelerinin terimlerdeki ortak çarpan olduğunu görüyoruz. Tekrar ortak çarpan parantezine alarak devam edersek:

$a(x+y+z)+b(x+y+z)= (x+y+z).(a+b)$

şeklinde çarpanları belirlemiş oluruz.

2.yol: Verilen çok terimli ifadede x' li, y' li ve z' li terimleri ayrı gruplar olarak düşünürsek, x' li terimlerde x ortak parantezine, y' li terimlerde y ortak parantezine, z' li terimlerde z ortak parantezine alarak işleme devam edebiliriz.

$ax+ay+az+bx+by+bz=x(a+b)+y(a+b)+z(a+b)$

olur. Burada da (a+b) ifadelerinin ortak olduğunu görüp tekrar ortak çarpan parantezine alırsak:

$x(a+b)+y(a+b)+z(a+b)=(a+b).(x+y+z)$

şeklinde çarpanları belirlemiş oluruz.

3)Özdeşliklerden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

Değişkenlerin her değeri için eşit olan iki cebirsel ifadeye "özdeşlik" denir.
Örneğin, x ve y herhangi iki değişken olsun.

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

olup $(x+y)^2$ ile $x^2+2xy+y^2$ birbirine özdeş iki ifadedir. Özdeş olan ifadelerde bir ifadeyi diğerinin yerine alabiliriz.

Bazı temel özdeşlikler şunlardır:

$\left(x+y\right)^2=x^2+2xy+y^2$; Tam Kare

$\left(x-y\right)^2=x^2-2xy+y^2$; Tam Kare

$x^2-y^2=\left(x-y\right).\left(x+y\right)$; İki Kare Farkı

$\left(x+y\right)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; Toplamın Küpü

$\left(x-y\right)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$; Farkın Küpü

$$x^3+y^3=(x+y).(x^2-xy+y^2) \quad ; \text{İki Küp Toplamı}$$

$$x^3-y^3=(x-y).(x^2+xy+y^2) \quad ; \text{İki Küp Farkı}$$

Uyarı:

1) $(x+y)^2 \neq x^2+y^2$

$(x-y)^2 \neq x^2+y^2 \neq x^2-y^2$

$(x+y)^3 \neq x^3+y^3$

$(x-y)^3 \neq x^3-y^3$

2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

3) Üs çift iken aşağıdaki eşitlikler daima geçerlidir:

$(x-y)^2=(y-x)^2$

$(x-y)^4=(y-x)^4$

....

$(x-y)^{2n}=(y-x)^{2n}$

4) Üs tek iken aşağıdaki eşitlikler daima geçerlidir:

$x-y=-(y-x)$

$(x-y)^3=-(y-x)^3$

$(x-y)^5=-(y-x)^5$

....

$(x-y)^{2n+1}=-(y-x)^{2n+1}$

Örnekler: Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2+6x+9=x^2+2.3x+3^2$

$=(x+3)^2$

b) $4x^2-12x+9=(2x)^2-2.2x.3+3^2$

$=(2x-3)^2$

c) $25x^2-16y^2=(5x)^2-(4y)^2$

$=(5x-4y).(5x+4y)$

d) $9x^4-4y^2=(3x^2)^2-(2y)^2$

$=(3x^2-2y).(3x^2+2y)$

e) $(x+2)^2-(y-1)^2=\left[(x+2)-(y-1)\right].\left[(x+2)+(y-1)\right]$

$=(x+2-y+1).(x+2+y-1)=(x-y+3).(x+y+1)$

f) $x^3-6x^2+12x-8=x^3-3.x^2.2+3.x.2^2-2^3$

$=(x-2)^3$

g) $27x^3+27x^2+9x+1=(3x)^3+3.(3x)^2.1+3.3x.1^2+1^3$

$=(3x+1)^3$

h) $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y).\left[(2x)^2+(2x).(3y)+(3y)^2\right]$

$=(2x-3y).(4x^2+6xy+9y^2)$

ı) $a^3+125b^3=a^3+(5b)^3=(a+5b).\left[a^2-a.(5b)+(5b)^2\right]$

$=(a+5b).(a^2-5ab+25b^2)$

KURAL: ax^2+bx+c üç terimlisinin çarpanlarına ayrılması:
ax^2+bx+c biçimindeki ifadeler $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ ise çarpanlarına ayrılabilir.

1.Durum: a=1 ise x^2+bx+c cebirsel ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi çarpanlarına ayırmak için öncelikle x'in azalan kuvvetlerine göre terimleri yazarız. Daha sonra c sayısını öyle iki m ve n sayısının çarpımı olarak düşünürüz ki; m ve n'nin çarpımları c'yi verirken, toplamları da ortadaki sayı olan b'yi vermelidir. Bu şekilde m ve n sayılarını bulduğumuzda, x^2+bx+c ifadesini çarpanlarına ayırmış olarak;

$$x^2+bx+c=x^2+\left(m+n\right)x+m.n=\left(x+m\right).\left(x+n\right)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$x^2+bx+c=(x+m).(x+n)\ ;\ m.n=c,\ m+n=b$$
$$\begin{array}{cc} x & m \\ x & n \end{array}$$

Örnekler: Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2+7x+10=\left(x+5\right).\left(x+2\right)$; $5.2=10$ ve $5+2=7$

$$\begin{array}{cc} x & +5 \\ x & +2 \end{array}$$

b) $x^2+5x-6=\left(x+6\right).\left(x-1\right)$; $6.(-1)=-6$ ve $6-1=5$

$$\begin{array}{cc} x & +6 \\ x & -1 \end{array}$$

2.Durum: $a\neq 1$ ise ax^2+bx+c ifadesini çarpanlarına ayırmak için, yine öncelikle ifadeyi x' in azalan kuvvetlerine göre yazarız. Sonra birinci ve üçüncü terimin her birini öyle iki ifadenin çarpımı olarak düşünürüz ki; bu ifadeleri çapraz çarpıp topladığımızda ortadaki terimi bulmalıyız.

Bu şekilde bulduğumuz uygun değerleri (varsa) daha sonra karşılıklı olarak parantezlere alarak yazdığımızda ax^2+bx+c ifadesini çarpanlarına ayırmış oluruz.

$$ax^2+bx+c=(mx+p).(nx+q)\ ;\ mxq+nxp=bx$$
$$\begin{array}{cc} mx & p \\ nx & q \\ \hline \multicolumn{2}{c}{mxq+nxp=bx} \end{array}$$

Örnekler: Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $2x^2+5x-7=\left(2x+7\right).\left(x-1\right)$

$$\begin{array}{cc} 2x & +7 \\ x & -1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-2x+7x=5x} \end{array}$$

b) $3x^2-4x-7=\left(3x-7\right).\left(x+1\right)$

$$\begin{array}{cc} 3x & -7 \\ x & +1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{3x-7x=-4x} \end{array}$$

SADELEŞTİRME

Bir kesirli ifade sadeleştirilirken; önce pay ve payda çarpanlarına ayrılır. Eğer ortak çarpanlar varsa, pay ve payda ortak çarpanlara bölünür.

Örnek: $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ ifadesini sadeleştiriniz.

çözüm: $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\dfrac{(x-1).(x-2)}{(x-2).(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$

Örnek: $\dfrac{x^3-6x^2+8x}{6x^4-24x^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.

çözüm: $\dfrac{x^3-6x^2+8x}{6x^4-24x^2}=\dfrac{x\left(x^2-6x+8\right)}{6x^2\left(x^2-4\right)}=\dfrac{x(x-4).(x-2)}{6x^2(x-2).(x+2)}=\dfrac{x-4}{6x(x+2)}$

NOT: Kesirli cebirsel ifadelerde dört işlem, kesirli sayılarda olduğu gibi yapılır.

Örnek: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}=?$

çözüm: $\underset{(x+1)}{\dfrac{1}{x}}-\underset{x}{\dfrac{2}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x(x+1)}-\dfrac{2x}{x(x+1)}=\dfrac{x+1-2x}{x(x+1)}=\dfrac{-x+1}{x(x+1)}$

Örnek: $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}.\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{(x-1).(x+1)}{(x-1).\left(x^2+x+1\right)}.\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=1$

Örnek: $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2-17x+72}.\dfrac{x^2-25}{x^2-1}:\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-9x+8}=\dfrac{x^2-8x-9}{x^2-17x+72}.\dfrac{x^2-25}{x^2-1}.\dfrac{x^2-9x+8}{x^2-6x+5}$

$$=\frac{(x-9).(x+1)}{(x-9).(x-8)}.\frac{(x-5).(x+5)}{(x-1).(x+1)}.\frac{(x-8).(x-1)}{(x-5).(x-1)}$$

$$=\frac{x+5}{x-1}$$

Örnek: $\frac{x^3-x^2-x+y}{x^2-xy+x-y}:\frac{xy+x-y-1}{xy+x}=\frac{x^2(x-y)-(x-y)}{x(x-y)+(x-y)}.\frac{x(y+1)}{x(y+1)-(y+1)}$

$$=\frac{(x-y).(x^2-1)}{(x-y).(x+1)}.\frac{x(y+1)}{(y+1).(x-1)}$$

$$=\frac{(x-1).(x+1).x}{(x+1).(x-1)}$$

$$= x$$

Örnek: $a-\frac{1}{a}=2\sqrt{3}$ olduğuna göre $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ ifadesi neye eşittir?

çözüm: Verilen ifadenin her iki tarafının karesi alınırsa, sorulan ifadede kullanabileceğimiz bir değer elde ederiz:

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a^2-2.a.\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=12$$

$$\Rightarrow a^2-2+\frac{1}{a^2}=12$$

$$\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=14$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2.a.\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}$$

$$=a^2+2+\frac{1}{a^2}$$

$$=14+2$$

$=16$ sonucuna ulaşılır.

---------------------0---------------------

Öğr. Gör. Aytül DOĞAN