

7. HAFTA
ZAMANA BAĞLI ISI İLETİMİ

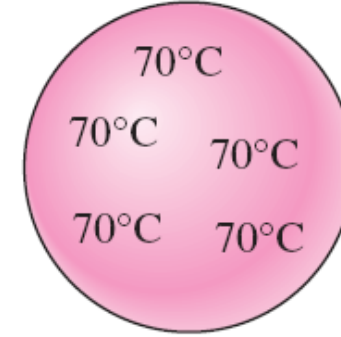
YIĞIK SİSTEM ÇÖZÜMLEMESİ

Isı transfer çözümlemesinde, bütün ısı transfer işlemi süresince bazı cisimlerin –aslında iç sıcaklığı üniform kalan- bir yığın gibi davrandığı gözlenir.

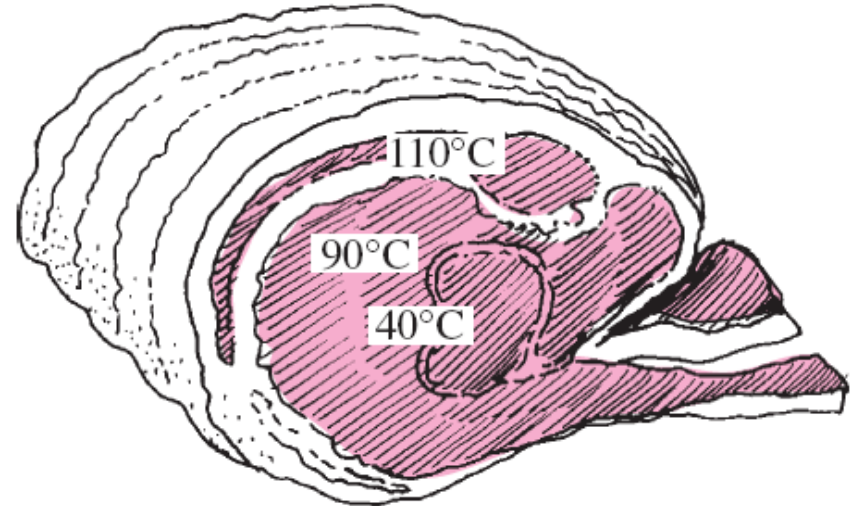
Bu tür cisimlerin sıcaklığının yalnız zamanın fonksiyonu olarak değiştiği, yani $T(t)$ olduğu kabul edilebilir.

Bu idealleştirmeyi kullanan ısı transfer çözümlemesi **yığın sistem** çözümlemesi olarak adlandırılır.

Küçük bir bakır top bir yığın sistem olarak modellenebilir, fakat kızarmış bir et parçası modellenemez.



(a) Copper ball



(b) Roast beef

$$\left(\text{Heat transfer into the body} \right)_{\text{during } dt} = \left(\text{The increase in the energy of the body} \right)_{\text{during } dt}$$

$$hA_s(T_\infty - T) dt = mc_p dT$$

$$m = \rho V \quad dT = d(T - T_\infty)$$

$$\frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p} dt$$

Integrating with

$$T = T_i \text{ at } t = 0$$

$$T = T(t) \text{ at } t = t$$

$$\ln \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p} t$$

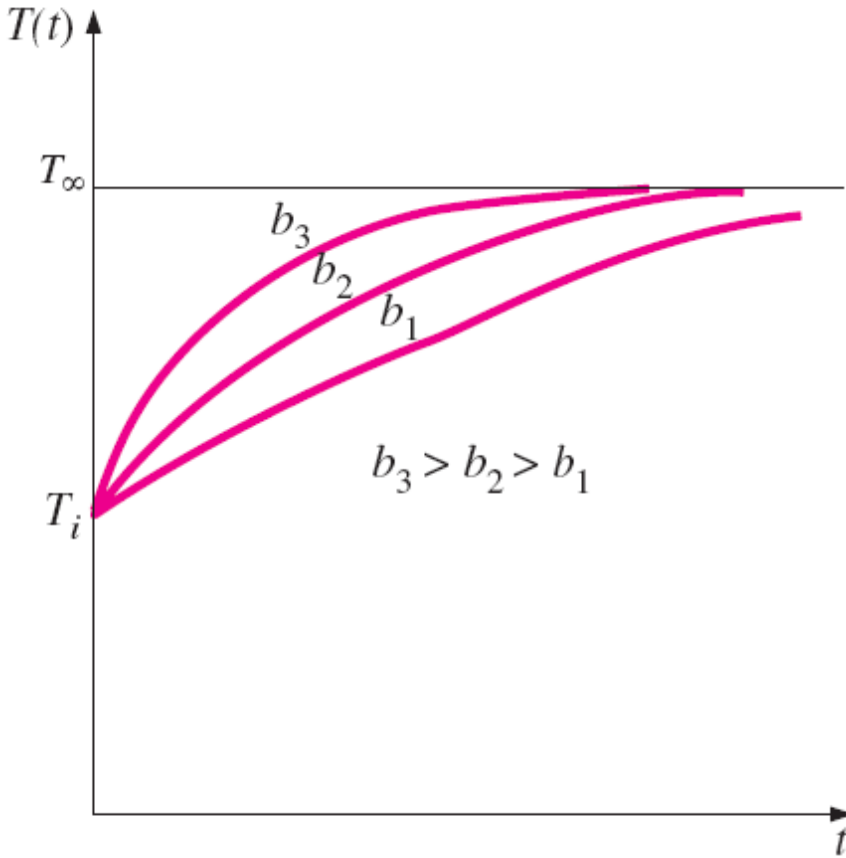
$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \quad b = \frac{hA_s}{\rho V c_p} \quad (1/s) \quad \text{time constant}$$



ŞEKİL 4-2

Yığık sistem analizindeki geometri ve parametreler.

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-bt} \quad b = \frac{hA_s}{\rho V c_p}$$



Zaman ilerledikçe yığık sistemin sıcaklığı çevre sıcaklığına yaklaşır.

- Herhangi bir t anında $T(t)$ cisim sıcaklığını veya seçenek olarak belirli bir $T(t)$ sıcaklığına erişebilmek için gerekli t zamanını bulma imkanı verir.
- Cismın sıcaklığı T_{∞} çevre sıcaklığına üstel olarak yaklaşır.
- Cismın sıcaklığı başlangıçta hızlıca değişir, fakat daha sonraları iyice yavaşlar. Büyük b değerleri cismın kısa zamanda çevre sıcaklığına yaklaşacağını gösterir.

$$\dot{Q}(t) = hA_s[T(t) - T_\infty]$$

(W) Bir t anında $T(t)$ sıcaklığı bilindiği takdirde, o anda cisim ile çevresi arasında taşınım ısı transfer hızı

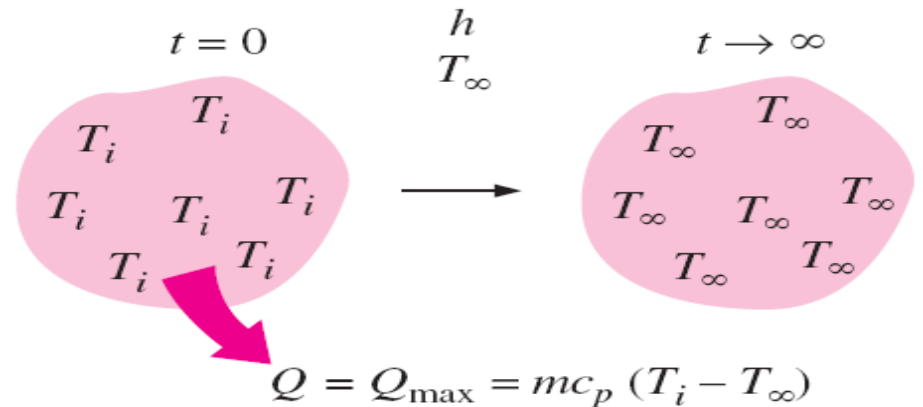
$$Q = mc_p[T(t) - T_i]$$

(kJ) t = 0'dan t anına kadar olan zaman aralığı üzerinden cisim ile çevre ortam arasındaki ısı transferinin **toplam miktarı**

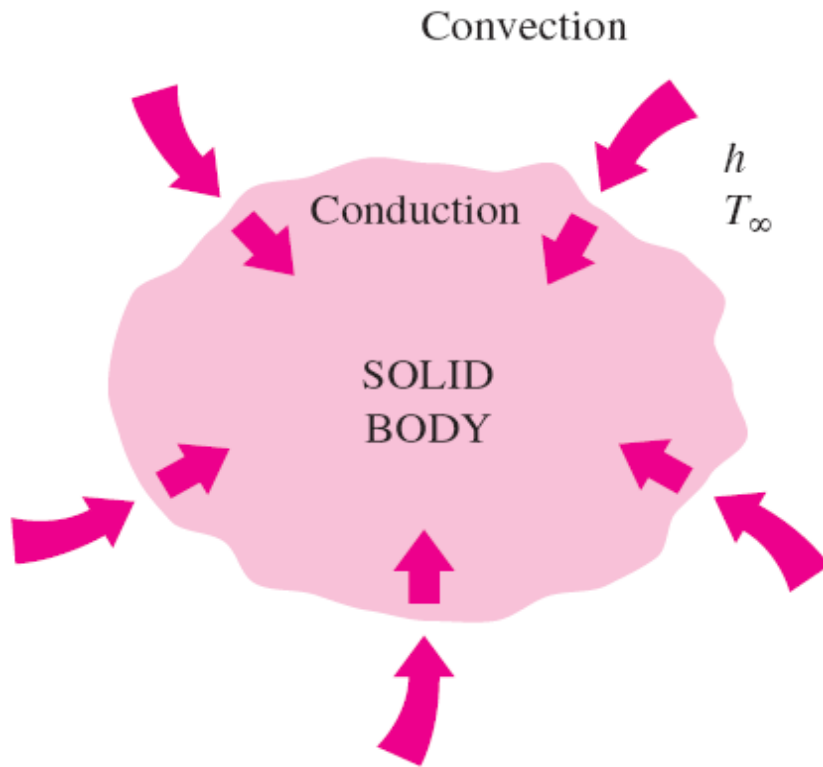
$$Q_{\max} = mc_p(T_\infty - T_i)$$

(kJ) Cisim T_∞ çevre sıcaklığına ulaştığında ısı transfer miktarı en üst değerine ulaşır. Bu yüzden, cisim ve çevre arasındaki **maksimum** ısı transferi

Cisim çevre sıcaklığına ulaştığında cisimden (veya cisme) olan ısı transferi en yüksek değerine ulaşır



Yığık Sistem Çözümlemesinin Ölçütü



$$Bi = \frac{\text{heat convection}}{\text{heat conduction}}$$

$$Bi = \frac{h}{k/L_c} \frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{Convection at the surface of the body}}{\text{Conduction within the body}}$$

$$Bi = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{\text{Conduction resistance within the body}}{\text{Convection resistance at the surface of the body}}$$

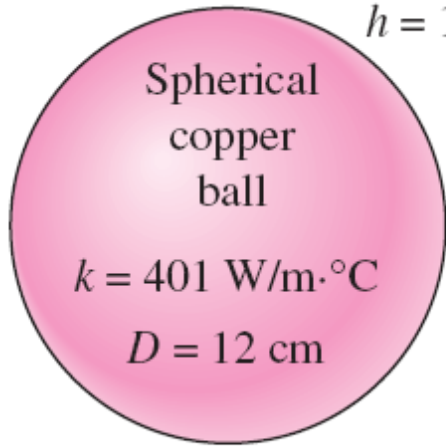
$$L_c = \frac{V}{A_s} \quad \text{Karakteristik uzunluk}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} \quad \text{Biot sayısı}$$

Yığık sistem çözümlemesinde uygulanabilir olduğu durum

$$Bi \leq 0.1$$

Bu ölçüt sağlandığı zaman cisim içindeki sıcaklıklarla çevre sıcaklığı farkları (yani $T - T_\infty$), küresel top gibi iyice toparlak geometriler için bile birbirlerinin %5 'i içerisinde kalırlar.

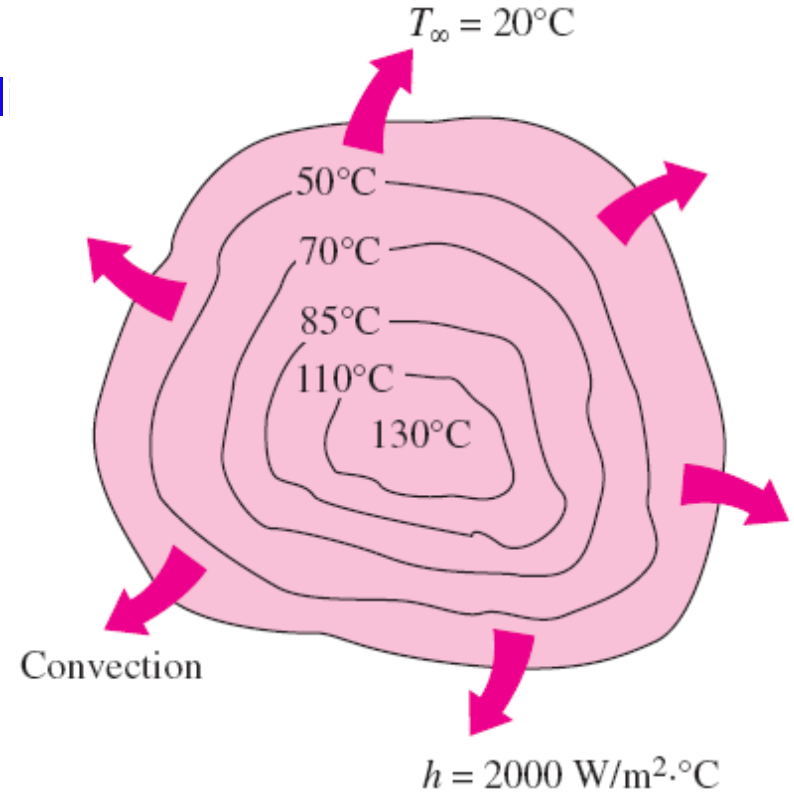
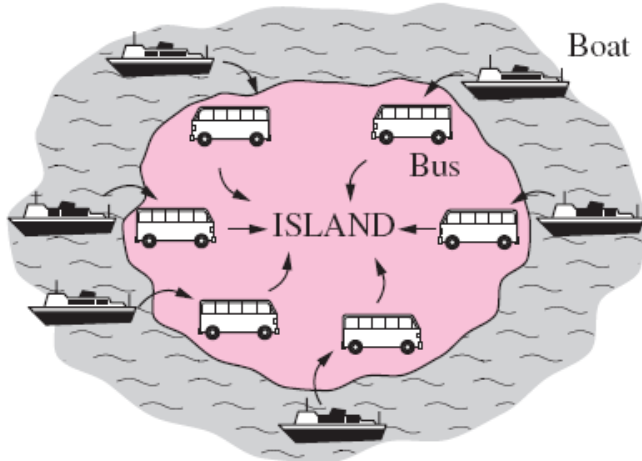


$$h = 15 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$$

Yüksek ısı iletkenlikli ve düşük taşınım katsayılı küçük cisimlerin yığık sistem çözümlemesi ölçütünü sağlaması beklenir.

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{1}{6} \pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6} D = 0.02 \text{ m}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{15 \times 0.02}{401} = 0.00075 < 0.1$$

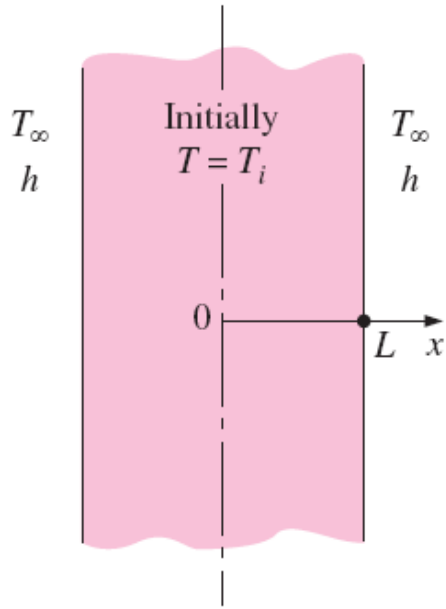


Taşınım katsayısı h yüksek ve k düşük olduğu zaman, büyük bir katı cismin iç ve dış bölgeleri arasında büyük sıcaklık farkı oluşur.

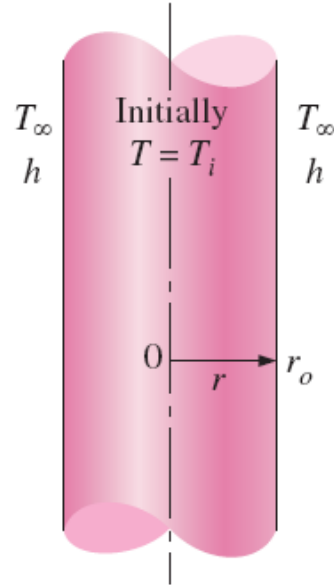
Katı bir cisme olan ısı transferi ile bir adaya yolcu trafiği arasındaki benzeşim.

BÜYÜK DÜZLEM DUVAR, UZUN SİLİNDİR VE KÜRELERDE YERE VE ZAMANA BAĞLI ISI İLETİMİ

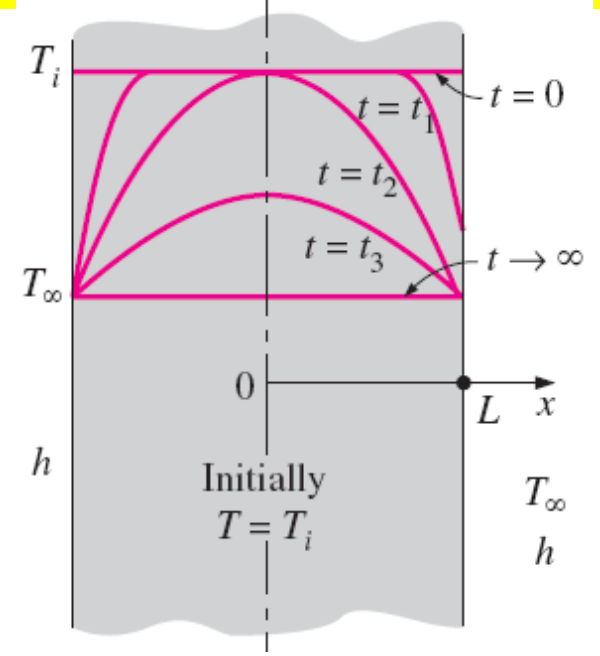
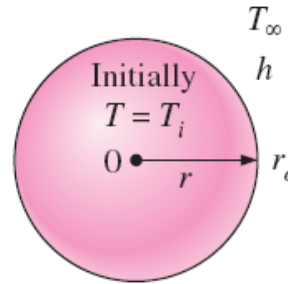
Büyük düzlem bir duvar, uzun bir silindir ve bir küre ile ilgili tek boyutlu problemlerde sıcaklığın zamana ve konuma bağlı değişimi incelenmektedir.



(a) A large plane wall



(b) A long cylinder



Yüzeylerinden taşınımına açık bir düzlem duvarda $T_i > T_\infty$ durumu için zamana bağlı sıcaklık grafikleri

İçinde ısı transferinin tek boyutlu olduğu basit geometrilerin şeması.

$$\theta_n = A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n X)$$

$$A_n = \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)}$$

$$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi}$$

For $\text{Bi} = 5$, $X = 1$, and $t = 0.2$:

| n | λ_n | A_n | θ_n |
|-----|-------------|---------|------------|
| 1 | 1.3138 | 1.2402 | 0.22321 |
| 2 | 4.0336 | -0.3442 | 0.00835 |
| 3 | 6.9096 | 0.1588 | 0.00001 |
| 4 | 9.8928 | -0.876 | 0.00000 |

Zamana bağlı ısı iletim problemlerinde, $-\lambda_n t$ bağlı üstel olarak azalan fonksiyondan dolayı n ve dolayısıyla λ_n arttıkça, ser çözümdeki terimler hızla küçülür.

The term in the series solution of transient conduction problems decline rapidly as n and thus λ_n increases because of the exponential decay function with the exponent $-\lambda_n \tau$.

Yaklaşık Analitik ve Grafik Çözümleri

Seri çözümlerde yer alan terimler, zaman arttıkça hızla yakınsar ve $t > 0.2$ için serilerin ilk terimi alınıp diğer bütün terimler ihmal edildiğinde % 2 'nin altında bir hatayla sonuçlanır.

Tek terim yaklaşımı;

$$\text{Plane wall: } \theta_{\text{wall}} = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x/L), \quad \tau > 0.2$$

$$\text{Cylinder: } \theta_{\text{cyl}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r/r_o), \quad \tau > 0.2$$

$$\text{Sphere: } \theta_{\text{sph}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}, \quad \tau > 0.2$$

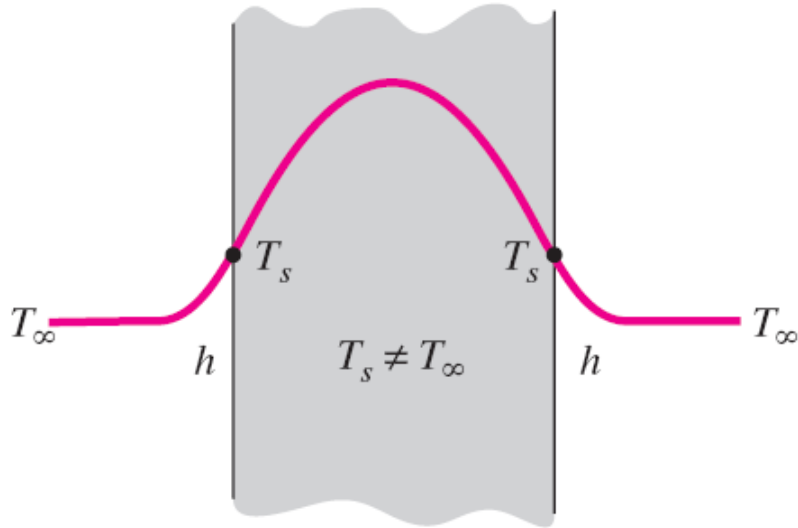
$$\text{Center of plane wall (} x = 0 \text{): } \theta_{0, \text{wall}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

$$\text{Center of cylinder (} r = 0 \text{): } \theta_{0, \text{cyl}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

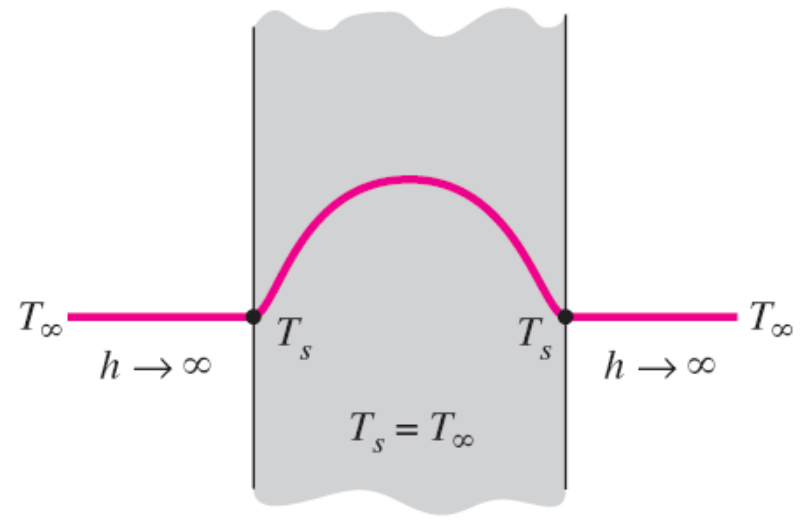
$$\text{Center of sphere (} r = 0 \text{): } \theta_{0, \text{sph}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Düzlem duvar, silindir ve küre için, -tek terim yaklaşımı esaslı- uygun boyutsuz sıcaklık bağıntıları kullanılarak ve belirtilen integraller alınarak, bu geometrilere ısı transfer kesri için şu bağıntılar elde edilir.

$$\frac{\theta_{\text{wall}}}{\theta_{0, \text{wall}}} = \cos\left(\frac{\lambda_1 x}{L}\right), \quad \frac{\theta_{\text{cyl}}}{\theta_{0, \text{cyl}}} = J_0\left(\frac{\lambda_1 r}{r_o}\right), \quad \text{and} \quad \frac{\theta_{\text{sph}}}{\theta_{0, \text{sph}}} = \frac{\sin(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}$$



(a) Finite convection coefficient



(b) Infinite convection coefficient

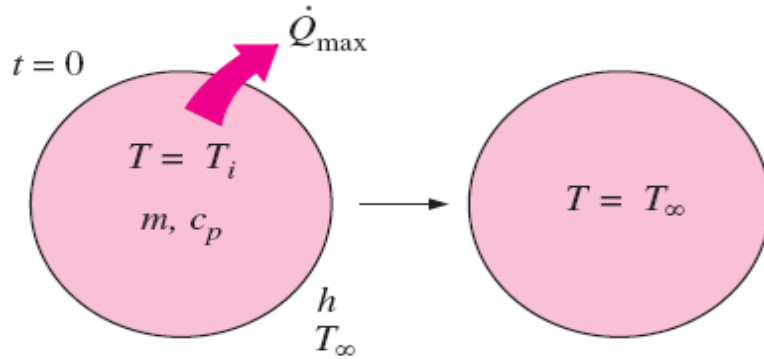
Belirli yüzey sıcaklığı, sonsuz h taşınım katsayısıyla T_∞ sıcaklığındaki bir çevreye olan taşınım durumuna karşılıktır.

$$Q_{\max} = mc_p(T_{\infty} - T_i) = \rho V c_p (T_{\infty} - T_i) \quad (\text{kJ}) \quad \frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{\int_V \rho c_p [T(x,t) - T_i] dV}{\rho c_p (T_{\infty} - T_i) V} = \frac{1}{V} \int_V (1 - \theta) dV$$

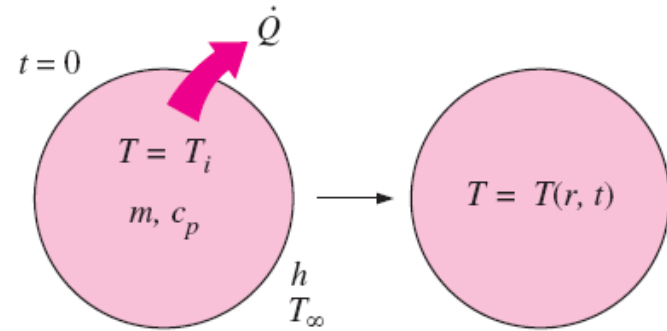
Plane wall: $\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{wall}} = 1 - \theta_{0, \text{wall}} \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1} \quad Q = \int_V \rho c_p [T(x,t) - T_i] dV$

Cylinder: $\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{cyl}} = 1 - 2\theta_{0, \text{cyl}} \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$

Sphere: $\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{sph}} = 1 - 3\theta_{0, \text{sph}} \frac{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}{\lambda_1^3}$



(a) Maximum heat transfer ($t \rightarrow \infty$)



$$\left. \begin{array}{l} \text{Bi} = \dots \\ \frac{h^2 \alpha t}{k^2} = \text{Bi}^2 \tau = \dots \end{array} \right\} \frac{Q}{Q_{\max}} = \dots$$

(Gröber chart)

(b) Actual heat transfer for time t

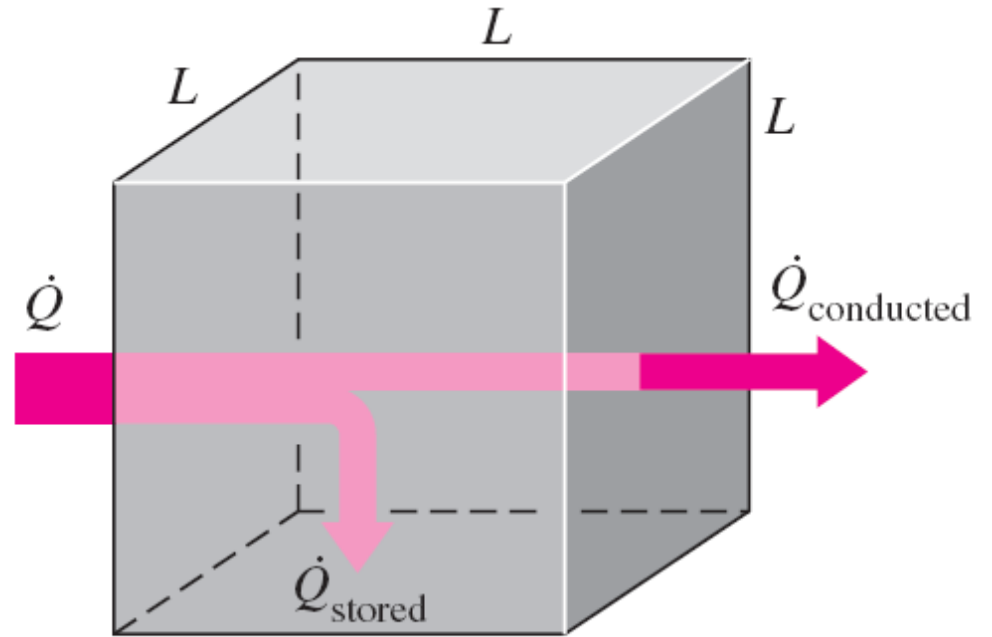
Belirlenen bir zamana kadar olan toplam ısı transfer kesri Q/Q_{\max} . Gröber grafikleri kullanılarak hesaplanır.

Fiziksel öneminin anlaşılması için Fourier sayısı

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{kL^2 (1/L) \Delta T}{\rho c_p L^3/t \Delta T} = \frac{\text{The rate at which heat is conducted across } L \text{ of a body of volume } L^3}{\text{The rate at which heat is stored in a body of volume } L^3}$$

- **Fourier sayısı, cisim içerisinde iletilen ısının, depolanan ısıya oranının bir ölçütüdür.**
- Büyük Fourier sayısı değeri, ısının cisim içerisine daha hızlı yayıldığını gösterir.

t zamanındaki Fourier sayısı o zamanda iletilen ısı miktarının depolanan ısı miktarına oranı olarak görülebilir.



$$\text{Fourier number: } \tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\dot{Q}_{\text{conducted}}}{\dot{Q}_{\text{stored}}}$$