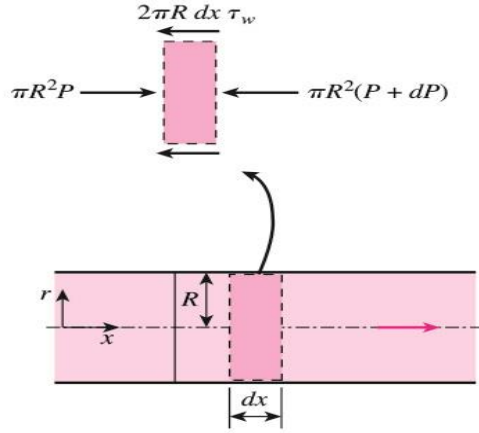


**14. HAFTA**  
**ZORLANMIŞ İÇ KONVEKSİYON**

# BORULARDA LAMİNER AKIŞ



Kuvvet dengesi:

$$\pi R^2 P - \pi R^2 (P + dP) - 2\pi R dx \tau_w = 0$$

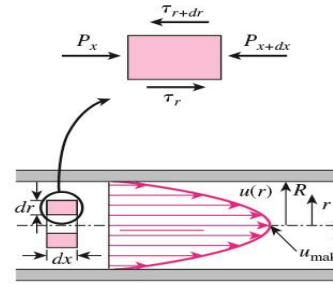
Basitleştirilmiş hali:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$$

## ŞEKİL 8-18

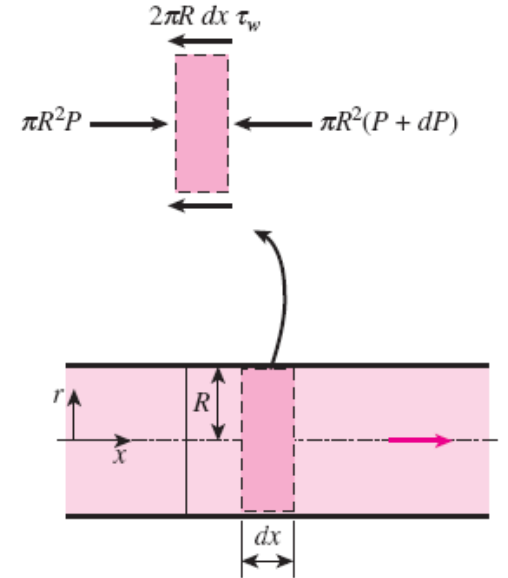
Yatay bir boruda tam gelişmiş laminar bir akışta  $R$  yarıçaplı,  $dx$  uzunlukta bir akışkan disk elemanının serbest cisim diyagramı.

boru ile aynı eksene yönlendirilmiş olan halka şeklinde bir diferansiyel elemanın serbest cisim diyagramı.



## ŞEKİL 8-17

Tam gelişmiş laminar akışta, yarıçapı  $r$ , kalınlığı  $dr$ , uzunluğu  $dx$  olan ve boru ile aynı eksene yönlendirilmiş olan halka şeklinde bir diferansiyel elemanın serbest cisim diyagramı.



Force balance:

$$\pi R^2 P - \pi R^2 (P + dP) - 2\pi R dx \tau_w = 0$$

Simplifying:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$$

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) + C_1 \ln r + C_2$$

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$V_{\text{avg}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr = \frac{-2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = -\frac{R^2}{8\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right)$$

$$u(r) = 2V_{\text{avg}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

The maximum velocity occurs at the centerline,  $r = 0$ :

$$u_{\text{max}} = 2V_{\text{avg}}$$

## Hız profili

*Tam gelişkin laminer boru akışındaki ortalama hız maksimum hızın yarısıdır.*

Boru akışı analizinde ilgi çekici bir nicelik akışı sürdürmek için gereken pompa ya da fanın güç gereksinimleriyle direkt ilişkili olduğu için  $\Delta P$  basınç kaybıdır,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad \text{Laminar flow:} \quad \Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu LV_{\text{avg}}}{R^2} = \frac{32\mu LV_{\text{avg}}}{D^2}$$

**Basınç düşüşü**

Pressure loss: 
$$\Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{\text{avg}}^2}{2}$$

where  $\rho V_{\text{avg}}^2/2$  is the dynamic pressure and  $f$  is the **Darcy friction factor**,

$f = \frac{8\tau_w}{\rho V_{\text{avg}}^2}$  Laminer akışta, sürtünme sabiti sadece reynolds sayısının bir fonksiyonudur ve boru yüzey pürüzlülüğünden bağımsızdır.

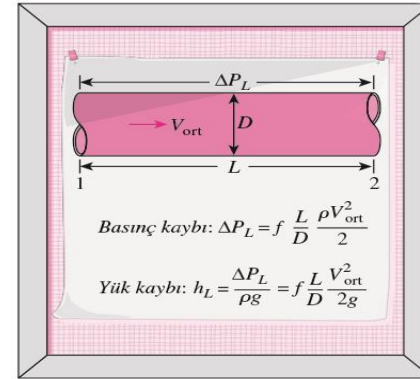
Circular tube, laminar: 
$$f = \frac{64\mu}{\rho D V_{\text{avg}}} = \frac{64}{\text{Re}}$$

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_{\text{avg}}^2}{2g}$$

## Yük kaybı

Basınç yükleri genelde eşdeğer akışkan kolon uzunluğu, yük kaybı

$h_L$  biçiminde ifade edilir.



**ŞEKİL 8-19**

Basınç kaybı (ve yük kaybı) bağıntısı, akışkanlar mekaniğinde en genel bağıntılarından biridir ve laminar veya türbülanslı akışlar, dairesel veya dairesel olmayan borular ve düz veya pürüzlü yüzeyli borular için geçerlidir.

Head loss  $h_L$  değeri borudaki sürtünme kayıplarını telafi etmek için akışkanın pompa tarafından yükseltilmesi gereken fazladan irtifadır. Yük kaybı viskozite kaynaklıdır ve çeper kayma gerilimlerine doğrudan bağlıdır

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_{avg}^2}{2g}$$

Basınç kaybını telafi edebilmek için gereken pompa gücü:

$$\dot{W}_{pump, L} = \dot{V} \Delta P_L = \dot{V} \rho g h_L = \dot{m} g h_L$$

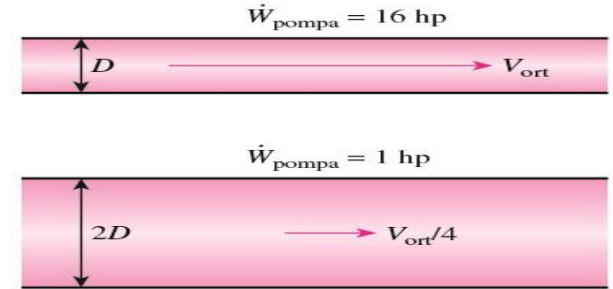
:

*Horizontal tube:*  $V_{avg} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} = \frac{(P_1 - P_2)D^2}{32\mu L} = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L}$  Laminer akış için ortalama hız

$$\dot{V} = V_{avg} A_c = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} \pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2)\pi D^4}{128\mu L} = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L}$$

**Poiseuille kanunu**

Belirtilmiş bir akış oranı için, basınç düşüşü ve dolayısıyla gereken pompa gücü borunun uzunluğu ve akışkan viskozitesiyle doğru, borunun çapının ya da yarıçapının dördüncü kuvvetiyle ters orantılıdır.



**ŞEKİL 8-20**

Bir laminer akış borulama sistemi için, boru çapı iki katına çıkarılarak gerekli pompa gücü 16 kat azaltılabilir

# Sıcaklık profili ve Nusselt sayısı

$$\dot{m}c_p T_x - \dot{m}c_p T_{x+dx} + \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} = 0$$

$$\dot{m} = \rho u A_c = \rho u (2\pi r dr)$$

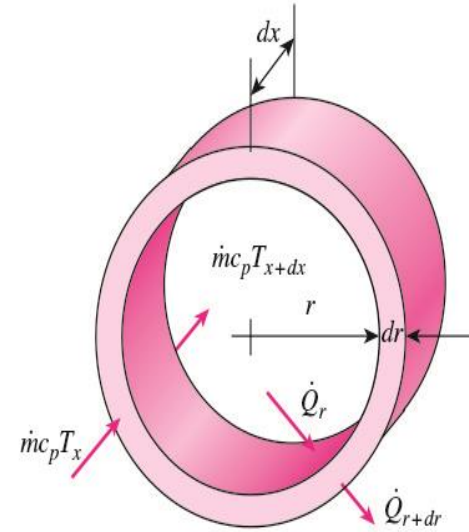
$$\rho c_p u \frac{T_{x+dx} - T_x}{dx} = -\frac{1}{2\pi r dx} \frac{\dot{Q}_{r+dr} - \dot{Q}_r}{dr}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{2\rho c_p \pi r dx} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( -k 2\pi r dx \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -2\pi k dx \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

$$\alpha = k/\rho c_p$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$



**ŞEKİL 8-21**

Enerji denge bağıntısının türetilmesinde kullanılan diferansiyel hacim elemanı.

*Kütle akışının kontrol hacmine aktardığı net enerji oranı, radyal yöndeki net ısı taşınımına eşittir.*

# Sabit Yüzey Isıl Akısı

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{2\dot{q}_s}{\rho V_{\text{avg}} c_p R} = \text{constant}$$

$$\frac{4\dot{q}_s}{kR} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right)$$

$$T = \frac{\dot{q}_s}{kR} \left( r^2 - \frac{r^4}{4R^2} \right) + C_1 r + C_2$$

$$\text{Nu} = \frac{hD}{k} = 4.36$$

**ASınır şartları  $r=0$ 'da  $\partial T/\partial x = 0$   
(simetriden dolayı) ve  $r = R$ 'de  $T = T_s$  uygulanırsa**

$$T = T_s - \frac{\dot{q}_s R}{k} \left( \frac{3}{4} - \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{4R^4} \right)$$

$$T_m = T_s - \frac{11}{24} \frac{\dot{q}_s R}{k}$$

$$\dot{q}_s = h(T_s - T_m)$$

Bu yüzden, sabit yüzey ısı akısına maruz kalan dairesel bir borudaki tam gelişkin laminar akış için Nusselt sayısı sabittir. Reynolds ya da Prandtl sayılarına bağlı değildir.

$$h = \frac{24}{11} \frac{k}{R} = \frac{48}{11} \frac{k}{D} = 4.36 \frac{k}{D}$$

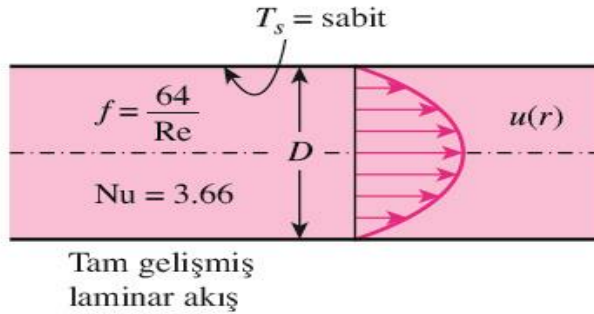
# Sabit yüzey sıcaklığı

Circular tube, laminar ( $T_s = \text{constant}$ ):

$$\text{Nu} = \frac{hD}{k} = 3.66$$

Nu sayısı ilişkilerinde kullanılan k termal iletkenlik değeri yığık ortalama akışkan sıcaklığı için hesaplanmalıdır.

Laminer akış için, yüzey pürüzlülüğünün sürtünme faktörü ve ısı transfer katsayısı üzerindeki etkisi ihmal edilebilir.



## ŞEKİL 8-22

Yüzey sıcaklığı sabit bir borudaki laminar akışta sürtünme faktörü ve ısı transfer katsayısı tam gelişmiş bölgede sabit kalır.

## Dairesel olmayan borularda laminar akış

Tablo 8-1'de çeşitli kesitlere sahip borularda tam gelişkin laminar akış için Nusselt sayısı ilişkileri verilmiştir.

Bu borulardaki akış için Nusselt ve Reynolds sayıları bulunurken hidrolik çap  $D_h = 4A_c/p$  esas alınır.

Nusselt sayısı belirliyse, taşınım ısı transferi katsayısı  $h = k\text{Nu}/D_h$  ifadesiyle

hesaplanabilir.



Yüzey sıcaklığı sabit ve boyu L olan bir dairesel boruda ısı giriş bölgesi için ortalama Nusselt sayısı:

$$\text{Entry region, laminar:} \quad \text{Nu} = 3.66 + \frac{0.065 (D/L) \text{Re Pr}}{1 + 0.04[(D/L) \text{Re Pr}]^{2/3}}$$

Ortalama Nusselt sayısı giriş bölgesinde daha büyüktür ve,  $L \rightarrow \infty$  gittikçe asimptotik olarak 3,66 tam gelişkin değerine ulaşır.

Yüzey ve akışkan sıcaklıkları arasındaki fark büyük olduğunda, viskozitenin sıcaklık ile değişimini hesaba katmak gerekli olabilir:

$$\text{Nu} = 1.86 \left( \frac{\text{Re Pr } D}{L} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu_b}{\mu_s} \right)^{0.14}$$

Yüzey sıcaklığında hesaplanan  $\mu_s$  hariç bütün özellikler yığık ortalama akışkan sıcaklığında hesaplanır.

L uzunluğunda sabit sıcaklıklı paralel plakalar arasındaki akışın ısı giriş bölgesindeki ortalama Nusselt sayısı:

$$\text{Entry region, laminar:} \quad \text{Nu} = 7.54 + \frac{0.03 (D_h/L) \text{Re Pr}}{1 + 0.016[(D_h/L) \text{Re Pr}]^{2/3}}$$

$$\text{Re} \leq 2800$$

# Borularda Türbülanslı Akış

*Smooth tubes:*  $f = (0.790 \ln Re - 1.64)^{-2}$   $3000 < Re < 5 \times 10^6$

$Nu = 0.125 f Re Pr^{1/3}$  *Chilton–Colburn benzerliği* Birinci Petukhov denklemi

$f = 0.184 Re^{-0.2}$  *(analojisi)*

$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3}$   $\left( \begin{array}{l} 0.7 \leq Pr \leq 160 \\ Re > 10,000 \end{array} \right)$  Colburn Denklemi

$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$  *Dittus–Boelter denklemi*

$n = 0.4$  for *heating* and  $0.3$  for *cooling*

Yüksek sıcaklık farkından ötürü özelliklerdeki değişim büyükse

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \left( \begin{array}{l} 0.7 \leq Pr \leq 17,600 \\ Re \geq 10,000 \end{array} \right)$$

$T_s$  değerinde hesaplanan  $\mu_s$  hariç bütün özellikler  $T_b$  değerinde hesaplanır.,

$$\text{Nu} = \frac{(f/8) \text{ Re Pr}}{1.07 + 12.7(f/8)^{0.5} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} \quad \left( \begin{array}{l} 0.5 \leq \text{Pr} \leq 2000 \\ 10^4 < \text{Re} < 5 \times 10^6 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{ikinci} \\ \text{Petukhov} \\ \text{denklemi} \end{array}$$

$$\text{Nu} = \frac{(f/8)(\text{Re} - 1000) \text{ Pr}}{1 + 12.7(f/8)^{0.5} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} \quad \left( \begin{array}{l} 0.5 \leq \text{Pr} \leq 2000 \\ 3 \times 10^3 < \text{Re} < 5 \times 10^6 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Gnielinski} \\ \text{ilişkisi} \end{array}$$

$$\text{Liquid metals, } T_s = \text{constant:} \quad \text{Nu} = 4.8 + 0.0156 \text{ Re}^{0.85} \text{ Pr}_s^{0.93}$$

$$\text{Liquid metals, } \dot{q}_s = \text{constant:} \quad \text{Nu} = 6.3 + 0.0167 \text{ Re}^{0.85} \text{ Pr}_s^{0.93}$$

$$(0.004 < \text{Pr} < 0.01)$$

$$10^4 < \text{Re} < 10^6$$

Yukarıdaki ilişkiler boru yüzeylerindeki ısı şartlarından pek etkilenmez ve

$T_s = \text{sabit}$  ve  $q_s = \text{sabit}$  durumlarının ikisi için de kullanılabilir.

# Pürüzlü yüzeyler

Tam gelişkin türbülanslı boru akışındaki sürtünme faktörü Reynolds sayısına ve boru pürüzlerinin ortalama yüksekliğinin boru çapına oranı olan **bağıl pürüzlülük**

$\varepsilon/D$  değerlerine bağlıdır.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (\text{turbulent flow}) \quad \text{Colebrook denkleminin}$$

**Moody chart** appendix kısmında Fig. A–20 olarak verilmiştir.

Bu diyagram boru akışı için Darcy sürtünme faktörünü geniş bir aralıkta, Reynolds sayısı ve  $\varepsilon/D$  oranının bir fonksiyonu olarak vermektedir.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1.8 \log \left[ \frac{6.9}{\text{Re}} + \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right] \quad \text{S. E. Haaland tarafından verilen yaklaşık bir f açık(explicit) ilişkisi}$$

Türbülanslı akışta, duvar pürüzlülüğü  $h$  ısı transferi katsayısını 2kat ya da daha fazla artırır. Pürüzlü borular için taşınım **ısı transferi katsayısı Moody diyagramı ya da Colebrook denkleminde bulunan sürtünme faktörünün** kullanımıyla Gnielinski ilişkisi benzeri Nusselt sayısı bağıntılarından yaklaşık olarak hesaplanabilir..

# Giriş bölgesinde gelişen türbülanslı akış

Türbülanslı akış için özgül giriş uzunlukları genellikle boru çapının 10 katı uzunluğu kadar küçüktür ve dolayısıyla tam gelişkin türbülanslı akış için hesaplanmış Nusselt sayısı tüm boru için yaklaşık olarak kullanılabilir.

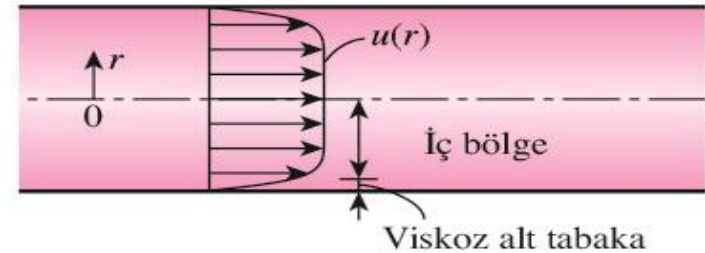
Bu basitleştirilmiş yaklaşım uzun borularda basınç düşüşü ve ısı transferi için uygun ve kısa olanlar için mantıklı sonuçlar verir.

Literatürde, giriş bölgelerinde daha duyarlı sürtünme ve ısı transferi katsayıları için bağıntılar bulunmaktadır.

## Dairesel Olmayan Borularda Türbülanslı Akış

Borularda basınç düşüşü ve ısı transferi karakteristiği duvar yüzeyine yakın çok ince viskoz alttabaka tarafından belirlenir ve eksen bölgesinin şekli çok fazla önem teşkil etmemektedir.

Dairesel borular için yukarıda verilen türbülanslı akış ilişkileri, Reynolds sayısı hesabında kullanılan  $D$  yarıçapını  $D_h = 4A_c/p$  hidrolik yarıçapıyla değiştirmek kaydıyla dairesel olmayan borularda da makul doğrulukla kullanılabilir.



**ŞEKİL 8–28**

Türbülanslı akışta, iç bölgede hız profili hemen hemen bir düz çizgidir ve etkili hız gradyanları viskoz alt tabakada meydana gelir.

# Halka borular içinde akış

$$D_h = \frac{4A_c}{P} = \frac{4\pi(D_o^2 - D_i^2)/4}{\pi(D_o + D_i)} = D_o - D_i$$

Annulus'un hidrolik çapı

Laminer akışta, iç ve dış yüzeyler için taşınım katsayıları aşağıdaki ifadelerle hesaplanır:

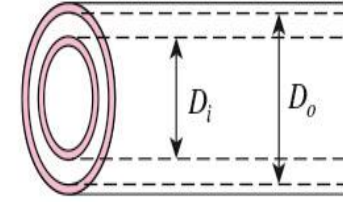
$$Nu_i = \frac{h_i D_h}{k} \quad \text{and} \quad Nu_o = \frac{h_o D_h}{k}$$

Tam gelişkin türbülanslı akış için,  $h_i$  ve  $h_o$  yaklaşık olarak birbirine eşittir, ve boru annulusu  $D_h = D_o - D_i$  hidrolik çapına sahip dairesel olmayan bir kanal olarak ele alınabilir.

Nusselt sayısı, Gnielinski denklemi gibi uygun bir türbülanslı akış ilişkisinden hesaplanabilir. Petukhov ve Roizen(1964), doğruluğu arttırmak için, boru duvarlarının birinin adyabatik olduğu ve ısı transferinin öbür duvardan gerçekleştiği durumlarda, Nusselt sayısı aşağıdaki doğrulama faktörleriyle çarpılmasını önermişlerdir..

$$F_i = 0.86 \left( \frac{D_i}{D_o} \right)^{-0.16} \quad (\text{outer wall adiabatic})$$

$$F_o = 0.86 \left( \frac{D_i}{D_o} \right)^{-0.16} \quad (\text{inner wall adiabatic})$$



ŞEKİL 8-29

İki eşeksenli borudan oluşan çift borulu ısı bir değiştirici.

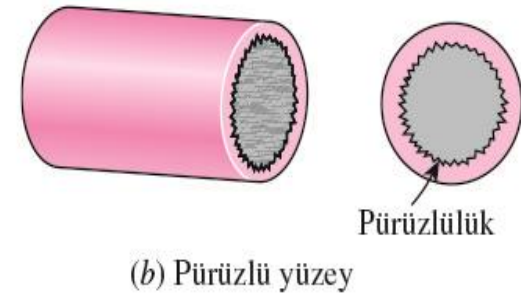
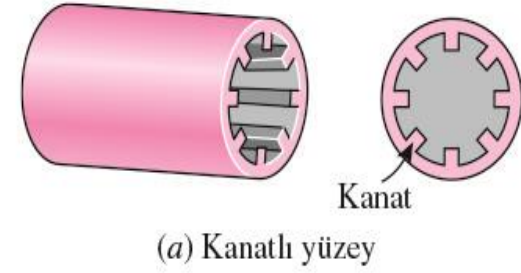
# Isı Transferi Arttırımı

Pürüzlü yüzeyli borular, pürüzsüz yüzeyli borulara göre çok daha yüksek ısı transferi katsayılarına sahip olurlar.

Boruda türbülanslı akıştaki ısı transferi yüzeyi pürüzledirerek %400 arttırılabilir.

Ancak yüzeyi pürüzlendirmek tabii ki sürtünme katsayısını ve dolayısıyla pompa ya da fanın güç gereksinimini arttıracaktır.

Konveksiyon ısı transferi katsayısı titreşim üreteçleriyle titreşen akış oluşturarak, şeritler koyup akış döndürülerek veya kıvrık borularla ikincil akışlar meydana getirilerek arttırılabilir.



## ŞEKİL 8-30

Taşıyıcıyla ısı transferini arttırmak için boru yüzeyleri sıklıkla pürüzlendirilir, kıvrımlandırılır veya kanatlandırılır.