

MATRİSLER

SORU 14.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ matrisi için } 2a_{13} + a_{22}^2 - a_{23} \text{ ifadesinin eđiti nedir?}$$

ÇÖZÜM 14.1

$$a_{13} = 3, a_{22} = 0, a_{23} = 6 \text{ olduğundan } 2a_{13} + a_{22}^2 - a_{23} = 2 \cdot 3 + 0^2 - 6 = 0 \text{ bulunur.}$$

SORU 10.2

$$A = \begin{bmatrix} 2x-3 & y+2 \\ -5 & x-b \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ a & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisleri için } A = B \text{ ise } x, y, a, b \text{ sayılarını bulunuz.}$$

ÇÖZÜM 14.2

$A = B$ olduğundan $2x-3=1, y+2=5, a=-5, x-b=0$ eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden,

$$2x-3=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2,$$

$$y+2=5 \Rightarrow y=3$$

$$a=-5$$

$$x-b=0 \Rightarrow b=x=2 \text{ bulunur.}$$

SORU 14.3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } \frac{1}{2}A - 3B \text{ matrisini bulunuz.}$$

ÇÖZÜM 14.3

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } 3B = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$\frac{1}{2}A - 3B = \begin{bmatrix} 2-(-3) & -1-9 & 1/2-0 \\ -1/2-(-6) & 3/2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 1/2 \\ 11/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

SORU 14.4

1) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A.B$ çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM 14.4

$$A.B = \begin{bmatrix} 4.1 + (-1).2 + 3.(-3) & 4.(-1) + (-1).4 + 3.2 \\ 0.1 + 2.2 + 1.(-3) & 0.(-1) + 2.4 + 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

SORU 14.5

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

ÇÖZÜM 14.5

Sarrus kuralı kullanılırsa

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 1.(-4).5 + 0.3.1 + 1.2.1 - 1.(-4).1 - 1.3.1 - 5.2.0 = -17 \text{ bulunur.}$$

SORU 14.6

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin varsa A^{-1} tersini bulunuz.

ÇÖZÜM 14.6

$\det A \neq 0$ olduğundan A matrisinin tersi vardır.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1.8-2.3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

SORU 14.7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisleri için } A.B^T \text{ işleminin sonucunu bulunuz.}$$

ÇÖZÜM 14.7

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisi olur.}$$

$$A.B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+3.(-1) & 1.2+3.1 \\ 3.1+2.(-1) & 3.2+2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

SORU 14.8

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisinde } K_{22} \text{ eşçarpanını (kofaktörünü) , } M_{22} \text{ minörünü bulunuz.}$$

Ayrıca, matrisin determinantını hesaplayınız.

ÇÖZÜM 14.8

Verilen matriste $a_{22} = 1$ olmaktadır. A matrisinde bu elemanın bulunduğu satır ve sütundaki elemanlar atılırsa;

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1.2 - 2.3 = -8 \text{ ve } K_{22} = (-1)^{2+2} . M_{22} = (-1)^4 . \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1).2 - 2.3 = -8$$

bulunur. Ayrıca matrisin determinantını bulmak için matrisin 1. satırını seçilirse

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} . (-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} . 0 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} . 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 . (-1) (1.2 - (-5).1) + (-1)^3 . 0 . (3.2 - 2.(-5)) + (-1)^4 . 3 . (3.1 - 2.1) = -7 + 0 + 3 = -4 \end{aligned}$$

bulunur.

SORU 14.9

$x + 2y = -8$
 $2x + 3y = -9$ verilen denklem sisteminin çözümünü ters matris yöntemiyle bulunuz.

ÇÖZÜM 14.9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8 \\ -9 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot EkA$$

$A_{11} = 3$ ve; $A_{12} = -2$; $A_{21} = -2$ $A_{22} = 1$ bulunur. Bu durumda $EkA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

bulunur. Ayrıca $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$ olduğundan $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ elde edilir.

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)(-8) + 2(-9) \\ 2(-8) + (-1)(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix} \text{ bulunur. Bu sonuca göre;}$$

$x = 6$, $y = -7$, elde edilir.

SORU 14.10

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + 5y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases} \text{ verilen denklem sisteminin çözümünü Cramer yöntemiyle}$$

bulunuz.

ÇÖZÜM 14.10

Verilen denklemlerin matris gösterimleri

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

$$\det A = 15, \det X = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15, \det Y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15 \text{ ve}$$

$$\det Z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 30 \text{ bulunur. Bu durumda } x = \frac{\det X}{\det A} = \frac{15}{15} = 1, y = \frac{\det Y}{\det A} = \frac{-15}{15} = -1$$

$$, z = \frac{\det Z}{\det A} = \frac{30}{15} = 2 \text{ bulunur. Bu sonuca göre } x = 1, y = -1, z = 2 \text{ elde edilir.}$$