

5. BORULARDAKİ VİSKOZ (SÜRTÜNME) AKIM

5.14. Borularda Viskoz (Sürtünmeli) Akım İle İlgili Uygulama Örnekleri

ÖRNEK-5.1: Sıcaklığı 10 C° olan suyun özelliklerini taşıyan bir akışkan 4 mm çapında ve 0,25 m uzunluğunda bir pipetle 4 cm³/s'lik veride emilmektedir. Akım tipi laminer midir? Tam gelişmiş akım mıdır? Açıklayınız. 10 C°'deki suyun kinematik viskozitesi 1,31.10⁻⁵ m²/s alınacaktır.

Çözüm:

Akımın laminer olması için Re<2100 olması gerekir.

$$Re = \frac{\rho.V.D}{\mu} = \frac{\rho.D}{\mu} \left(\frac{4.Q}{\pi.D^2} \right) = \frac{4.\rho.Q}{\pi.\rho.D.\vartheta}$$

$$Re = \frac{4.Q}{\pi.D.\vartheta}$$

$$Re = \frac{4.(4.10^{-6} m^3 / s)}{\pi.(4.10^{-3} m).(1,31.10^{-5} m^2 / s)}$$

$$Re = 97,19 \text{ (laminer)}$$

laminer akımda giriş bölgesi uzunluğu;

$$\frac{Le}{D} = 0,06.Re$$

$$Le = 0,06.D.Re$$

$$Le = 0,06.4 \text{ mm}. 97,19$$

$$Le = 23,33 \text{ mm}$$

Pipetin uzunluğu 250 mm'dir ve giriş bölgesi uzunluğu bundan çok küçük olduğu için akım tam gelişmiş akım kabul edilebilir.

ÖRNEK-5.2: Özgül kütlesi 1010 kg/m³ ve dinamik viskozitesi 2.10⁻³ Pa.s olan süt çapı 25,4 mm olan yatay boru içerisinde akmaktadır. Akışın verdisi 2.10⁻⁴ m³/s olup akış sürtünmeli (viskoz), kararlı ve sıkıştırılmaz kabul edilecektir. Boru pürüzsüzdür.

- Akışın cinsini,
- Sürtünme katsayısını,

- c) Çeper (duvar) kayma gerilmesini,
d) Sürtünme (kayma) hızını,
e) Boru duvarından 10 mm uzaklıktaki ortalama hızı,
f) Bir metre boru uzunluğuna düşen basınç düşümünü ve sürtünme kaybını (hidrolik eğimi) bulunuz.

Çözüm:

$$a) V = \frac{4.Q}{\pi.D^2} = \frac{4.(2.10^{-4} m^3 / s)}{\pi.(25,4.10^{-3} m)^2}$$

$$V = 0,3947 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho.V.D}{\mu} = \frac{(1010 \text{ kg/m}^3).(0,3947 \text{ m/s}).(25,4 .10^{-3} \text{ m})}{2.10^{-3} \text{ Pa.s}}$$

Re = 5063 > 4000 olduğundan türbülanstır.

b) Boru pürüzsüz ve Re < 10⁵ olduğundan

$$f = \frac{0,316}{Re^{0,25}} = \frac{0,316}{(5063)^{0,25}}$$

$$f = 0,03746$$

c) Çeper (duvar) kayma gerilmesi (τ_w);

$$\tau_w = f.\rho.\frac{V^2}{8} = (0,03746).\left(1010 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right).(0,3947 \text{ m/s})^2 / 8$$

$$\tau_w = 0,7368 \text{ Pa}$$

d) Sürtünme hız (u^*);

$$u^* = V.\left(\frac{f}{8}\right)^{1/2} = (0,3947 \text{ m/s}).\left(\frac{0,03746}{8}\right)^{1/2}$$

$$u^* = 0,027 \text{ m/s ya da}$$

$$u^* = (\tau_w/\rho)^{1/2} = (0,7368 \text{ Pa}/1010 \text{ kg/m}^3)^{1/2}$$

$$u^* = 0,027 \text{ m/s}$$

e) Boru duvarından $y = 10 \text{ mm}$ uzaklıktaki ortalama akışkan hızı (\bar{u})

$$\bar{u} = u^* \cdot 2,5 \cdot \ln\left(\frac{y \cdot u^*}{\nu}\right) + 5 \cdot u^*$$

$$\bar{u} = (0,027 \text{ m/s}) \cdot (2,5) \cdot \ln\left(\frac{0,01 \text{ m} \cdot 0,027 \text{ m/s}}{(2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}) / 1010 \text{ kg/m}^3}\right) + 5 \cdot (0,027 \text{ m/s})$$

$$\bar{u} = 0,4668 \text{ m/s}$$

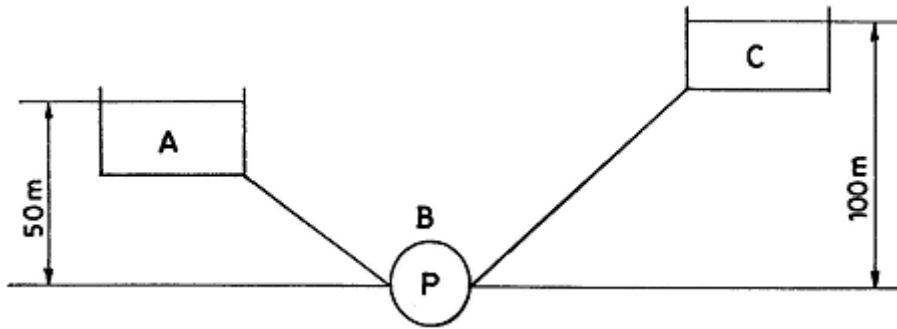
$$f) \frac{\Delta P}{L} = \frac{4 \cdot \tau_w}{D} = \frac{4 \cdot (0,7368 \text{ Pa})}{(25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m})}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = 116,03 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

$$i = \frac{h_L}{L} = \frac{f}{D} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} = \frac{0,03746 \cdot (0,3947 \text{ m/s})^2}{(25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot (2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2)}$$

$$i = \frac{h_L}{L} = 0,01171 \text{ m/m (hidrolik eğim)}$$

ÖRNEK-5.3: Aşağıdaki şekilde B noktasına yerleştirilen pompa ile A deposundan C deposuna saniyede $0,15 \text{ m}^3$ su pompalanacaktır. Sistemde sürtünme nedeniyle meydana gelen enerji kaybı $4,55 \text{ m}$, A deposunun B pompasına olan düşey uzaklığı 50 m , C deposunun B pompasına olan düşey uzaklığı 100 m olduğuna göre B noktasına yerleştirilen pompanın suyu A deposundan alıp C deposuna göndermesi için gerekli gücü bulunuz. Şekil kayıpları ihmal edilecektir.



Çözüm:

A ve C noktalarına Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + H_m = z_c + \frac{P_c}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g} + h_L$$

$$50+0+0+H_m= 100 \text{ m}+0+0+4,55 \text{ m}$$

$$H_m= 54,55 \text{ m}$$

$$N = \frac{H_m \cdot Q \cdot \gamma}{1000} = \frac{(54,55 \text{ m}) \cdot (0,15 \text{ m}^3/\text{s}) \cdot (9810 \text{ N/m}^3)}{1000}$$

$$N= 80,27 \text{ kW}$$

ÖRNEK-5.5: Çapı 150 mm olan bir boruda özgül kütlesi 1200 kg/m^3 , kinematik viskozitesi $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir yağ akmaktadır. Yağın verdisi $0,07 \text{ m}^3/\text{s}$ 'dir. Aralarındaki yatay uzaklık 120 m olan (1) ve (2) kesitlerindeki basınç sırasıyla 343 350 Pa ve 196 200 Pa'dır. Akışın yönü (1)'den (2)'ye doğru ise;

- Çeper kayma gerilmesini,
- Sürtünme (kayma) hızını,
- Boru eksenindeki hızı bulunuz.

Çözüm:

a) Borunun (1) ve (2) kesitlerine Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

$$z_1=z_2= 0 \text{ (yükseklik farkı yok, boru yatay)}$$

$$V_1=V_2 \text{ (kesit değişmiyor)}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + h_L$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 343 350 \text{ Pa} - 196 200 \text{ Pa}$$

$$\Delta P = 147 150 \text{ Pa}$$

Basınç düşümüne bağlı sürtünme denklemi (yatay boruda);

$$\Delta P = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2}$$

$$f = \frac{\Delta P \cdot 2D}{L \cdot \rho \cdot V^2} = \frac{(147150 \text{ Pa}) \cdot (2) \cdot (0,15 \text{ m})}{(120 \text{ m}) \cdot \left(1200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot (3,96)^2}$$

$$f = 0,0195$$

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot (0,07 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi \cdot (0,15 \text{ m})^2} = 3,96 \text{ m/s}$$

Çeper (duvar) kayma gerilmesi (τ_w);

$$\tau_w = f \cdot \rho \frac{V^2}{8} = 0,0195 \cdot (1200 \text{ kg/m}^3) \frac{(3,96 \text{ m/s})^2}{8}$$

$$\tau_w = 45,87 \text{ Pa}$$

$$\text{b) } u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{45,87 \text{ Pa}}{1200 \text{ kg/m}^3}\right)^{1/2}$$

$$u^* = 0,196 \text{ m/s}$$

$$\text{c) } R_e = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{(3,96 \text{ m/s}) \cdot (0,15 \text{ m})}{(1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})}$$

$R_e = 49500$ olduğundan $n = 6,7$ alınabilir. Buna göre;

$$\frac{V}{V_c} = \frac{2 \cdot n^2}{(n+1) \cdot (2n+1)}$$

$$V_c = \frac{V \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot n^2} = \frac{(3,96 \text{ m/s}) \cdot (7,7) \cdot (14,4)}{2 \cdot (6,7)^2}$$

$$V_c = 4,891 \text{ m/s}$$

Türbülans akımda merkez hızı bulmak için başka yöntemlerde vardır. Ama en güvenilir yöntem yukarıdakidir. Ancak aşağıdaki yöntemler de kullanılabilir.

Birinci yöntem türbülans akımda maksimum (boru merkezindeki) hızın ortalama hızın yaklaşık $\frac{1}{0,80} \dots \frac{1}{0,87}$ oranında olmasıdır. Yani;

$$V_{\max} = V_c = \frac{V}{0,80} \dots \frac{V}{0,87}$$

$$V_c = \frac{3,96 \text{ m/s}}{0,80} \dots \frac{3,96 \text{ m/s}}{0,87}$$

$V_c = 4,95 \text{ m/s} \dots 4,552 \text{ m/s}$ arasında değişmektedir.

İkinci yöntemde genellikle pürüzsüz borularda geçiş bölgesi için kullanılan ancak viskoz alt tabaka dışında diğer bölgelerde iyi sonuçlar veren aşağıdaki formüller kullanılmaktadır.

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2,5 \cdot \ln\left(\frac{y \cdot u^*}{\vartheta}\right) + 5,0 \quad (\text{geçiş ve dış tabakada})$$

$$\frac{V_c - \bar{u}}{u^*} = 2,5 \cdot \ln\left(\frac{R}{y}\right) \quad (\text{boru merkezinde})$$

iki formülü birleştirirsek merkez hız formülü bulunur.

$$\frac{V_c}{u^*} = 2,5 \cdot \ln\left(\frac{R}{y}\right) + 2,5 \cdot \ln\left(\frac{y \cdot u^*}{\vartheta}\right) + 5,0$$

$R = \text{Boru yarıçapı (0,075 m)}$,
 $y = \text{Duvardan olan uzaklık (0,075 m)}$,
 $u^* = 0,196 \text{ m/s}$ bulundu.
 $\vartheta = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

$$\frac{V_c}{u^*} = 2,5 \cdot \ln\left(\frac{0,075 \text{ m}}{0,075 \text{ m}}\right) + 2,5 \cdot \ln\left(\frac{0,075 \text{ m} \cdot 0,196 \text{ m/s}}{1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}\right) + 5$$

$$\frac{V_c}{u^*} = 0 + 22,7767$$

$$V_c = 22,7767 \cdot u^*$$

$$V_c = 22,7767 \cdot (0,196 \text{ m/s}) = 4,464 \text{ m/s}$$

III. Yöntem de;

$$\frac{V_c}{u^*} = 2,5 \cdot \ln\left(\frac{R}{y}\right) + 5,75 \log_{10}\left(\frac{u^* \cdot y}{\vartheta}\right) + 5,5$$

formülünü kullanmaktır.

$$\frac{V_c}{(0,196 \text{ m/s})} = 2,5 \cdot \ln\left(\frac{0,075 \text{ m}}{0,075 \text{ m}}\right) + 5,75 \log_{10}\left(\frac{0,196 \text{ m/s} \cdot 0,075 \text{ m}}{1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}\right) + 5,5$$

$$\frac{V_c}{0,196} = 0 + 23,2568$$

$V_c = 4,56 \text{ m/s}$ bulunur .

ÖRNEK-5.8: Çapı 101,6 mm, mutlak pürüzlülüğü 0,15 mm, uzunluğu 6 m olan bir boruda ortalama hız ile sürtünme katsayısı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$V = \left(\frac{87,78}{60f + 7,5} \right)^{1/2} \quad (\text{m/s})$$

Boruda akan akışkanın kinematik viskozitesi $1,66291 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ olarak verildiğine göre akışkan hızını bulunuz.

Çözüm:

Bu soru II. Tip akış problemine girmektedir. Hızı bulmak için bir f değeri kabul edelim. Bu f değeri 0,022 olsun. Buna göre akışkan hızı (V);

$$V = \left(\frac{87,78}{60 \cdot (0,022) + 7,5} \right)^{1/2}$$

$V = 3,15 \text{ m/s}$

Bağıl pürüzlülük $\frac{k}{D} = \frac{0,15 \text{ mm}}{101,6 \text{ mm}} \cong 0,0015$

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{V \cdot (0,1016 \text{ m})}{(1,66291 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})}$$

$Re = 6109,77$

Buna göre;

$Re = 6109,77$ ($3,15 \text{ m/s}$)

$Re = 19245,8$

Re= 19245,8 ve $\frac{k}{D} = 0,0015$ için Moody diyagramından $f = 0,029$ elde edilir ve $f = 0,022 \neq 0,029$ olduğundan iterasyona devam edilir. Bu sefer $f = 0,029$ alınır.

$$V = \left(\frac{87,78}{60 \cdot (0,029) + 7,5} \right)^{1/2}$$

$$V = 3,08 \text{ m/s}$$

$$Re = 6109,77 \text{ (3,08 m/s)}$$

$$Re = 18818$$

Bu Re ile Moody'den $f = 0,029$ bulunur.

Buna göre kabul edilen $f = 0,029$ değeri ile bulunan $f = 0,029$ değeri aynıdır. Böylece $V = 3,08 \text{ m/s}$ bulunur.

$$Q = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot V = \left(\frac{\pi \cdot (0,1016 \text{ m})^2}{4} \right) \cdot (3,08 \text{ m/s})$$

$$Q = 0,02497 \text{ m}^3/\text{s}$$

elde edilir.

ÖRNEK-5.9: Özgül kütlesi $\rho = 1,226 \text{ kg/m}^3$, viskozitesi $1,791 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ olan hava galvanizlenmiş demir boru ($k = 0,15 \text{ mm}$) içerisinde yatay olarak $0,06 \text{ m}^3/\text{s}$ 'lik veridiyle iletilmektedir. Basınç düşümünün 30 m 'de 3448 Pa 'dan daha fazla olmaması için boru çapını bulunuz. Hava sıkıştırılmaz kabul edilecektir.

Çözüm:

Bu soru III. Tip akış problemine bir örnektir. Yatay boruda $z_1 = z_2$ ve çap sabit olduğundan $V_1 = V_2$ 'dir.

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + h_L$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$P_1 = P_2 + f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\gamma \cdot V^2}{2 \cdot g}$$

$$V = \frac{4.Q}{\pi.D^2} = \frac{4.(0,06 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi.D^2}$$

$$V = \frac{0,0764}{D^2}$$

$$P_1 - P_2 = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} \dots\dots\dots(1)$$

$$P_1 - P_2 = f \cdot \frac{L}{2D} \cdot \rho \cdot \left(\frac{0,0764}{D^2} \right)^2$$

$$3448 \text{ Pa} = f \cdot \frac{(30 \text{ m})}{2D} \cdot (1,226 \text{ kg/m}^3) \cdot \frac{(5,83696 \cdot D^{-3})}{D^4}$$

$$3448 \text{ Pa} = 0,1073 \cdot \frac{f}{D^5}$$

$$D = 0,1255 f^{1/5} \dots\dots\dots(2)$$

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} = \frac{(1,226 \text{ kg/m}^3) \cdot (0,0764/D^2) \cdot D}{(1,791 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s})}$$

$$Re = \frac{5230}{D} \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{k}{D} = \frac{0,15 \text{ mm}}{D} \dots\dots\dots(4)$$

Yukarıda 4 adet eşitlik elde ettik. Deneme yanılma yöntemini kullanarak boru çapını bulalım. Sürtünme katsayısını $f = 0,02$ kabul edelim.

$$D = 0,1255 \cdot f^{1/5} = 0,1255 \cdot (0,02)^{1/5} = 0,0574 \text{ m}$$

$$\frac{k}{D} = \frac{0,15 \text{ mm}}{57,4 \text{ mm}} = 0,002613$$

$$Re = \frac{5230}{0,0574} = 91115$$

Bulunan $\frac{k}{D}$ ve Re 'ye göre Moody diyagramından $f = 0,027$ bulunur. Bu f , kabul edilen $0,02$ değerine eşit olmadığından işleme devam ederiz. Bu sefer $f = 0,027$ alırız.

$$D = 0,1255 \cdot (0,027)^{1/5} = 0,0609 \text{ m}$$

$$\frac{k}{D} = \frac{0,15 \text{ m}}{60,5 \text{ mm}} = 0,002463$$

$$Re = \frac{5230}{0,0609} = 85878$$

Yeni $\frac{k}{D}$ ve Re'ye göre Moody diyagramında $f = 0,027$ bulunur ve bu değer kabul edilene eşit olduğundan borunun çapı; $D = 60,9 \text{ mm}$ hesaplanmış olur.

ÖRNEK-5.10: Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi A, B, C depoları birbirine 1, 2 ve 3 borularıyla bağlanmıştır. Herbir borunun çapı 304,8 mm ve sürtünme katsayısı 0,02'dir. Boru uzunluğu boru çapına göre çok büyük olduğundan şekil (yersel) kayıplar ihmal edilecektir. A deposunun referans eksenindeki C deposundan yüksekliği 31 m, B deposunun yüksekliği 6 m'dir. (1) borusunun uzunluğu 306 m, (2) borusunun uzunluğu 153 m ve (3) borusunun uzunluğu 122 m alınacaktır. Akışkan A deposundan B ve C deposuna akmaktadır. Herbir depoya giren ya da çıkan veriyi bulunuz.

Çözüm:

Sistemde;

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$V_1 = V_2 + V_3 \dots\dots\dots(1)$$

Yazılabilir. Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

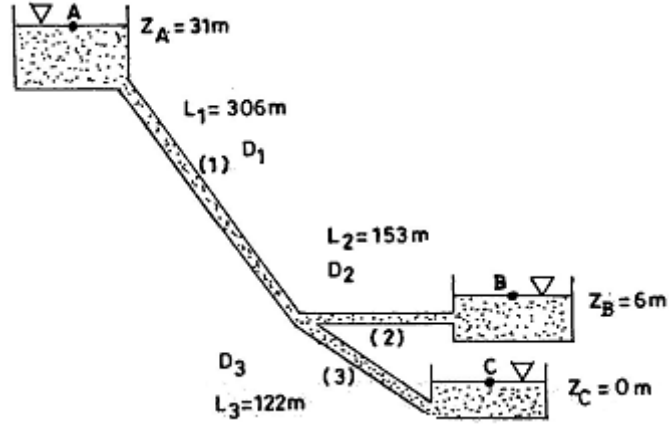
$$z_A = z_B + f_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + f_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$z_A = z_C + f_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + f_3 \cdot \frac{L_3}{D_3} \cdot \frac{V_3^2}{2 \cdot g}$$

$$z_A = 31 \text{ m}$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0,02$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = 304,8 \text{ mm}$$



$L_1 = 306 \text{ m}$ $L_2 = 153$ $L_3 = 122 \text{ m}$
 $Z_B = 6 \text{ m}$
 $Z_C = 0$

$$31 = 6 + 0,02 \cdot \frac{306}{0,3048} \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot 9,81} + 0,02 \cdot \frac{153}{0,3048} \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$24,43 = V_1^2 + 0,5V_2^2 \dots\dots\dots(2)$$

$$31 = 0 + 0,02 \cdot \frac{306}{0,3048} \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot 9,81} + 0,02 \cdot \frac{122}{0,3048} \cdot \frac{V_3^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$30,3 = V_1^2 + 0,4V_3^2 \dots\dots\dots(3)$$

(1), (2) ve (3) eşitlikleri aşağıdaki gibi çözelim.

(2) ve (3) eşitlik birlikte çözümlerse;

$$5,87 = -0,5 \cdot V_2^2 + 0,4 \cdot V_3^2$$

$$V_3 = \left(\frac{5,87 + 0,5V_2^2}{0,4} \right)^{1/2}$$

bulunur. (2) eşitlik tekrar düzenlenirse;

$$24,43 = V_1^2 + 0,5 \cdot V_2^2$$

$$24,43 = (V_2 + V_3)^2 + 0,5V_2^2$$

$$24,43 = \left[V_2 + \left(\frac{5,87 + 0,5 \cdot V_2^2}{0,4} \right)^{1/2} \right]^2 + 0,5 \cdot V_2^2$$

Bu formülün çözümünde $V_2 = 0,94$ m/s elde edilir.

$$V_1 = (24,43 - 0,5 \cdot V_2^2)^{1/2}$$

$$V_1 = (24,43 - 0,5 \cdot (0,94)^2)^{1/2}$$

$$V_1 = 4,898 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot V_1 = \frac{\pi \cdot (0,3048 \text{ m})^2}{4} \cdot (4,898 \text{ m/s}) = 0,357 \text{ m}^3/\text{s}$$

A deposundan gelen toplam verdi $0,357 \text{ m}^3/\text{s}$ 'dir.

$$Q_2 = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot V_2 = \frac{\pi \cdot (0,3048 \text{ m})^2}{4} \cdot (0,94 \text{ m/s}) = 0,0686 \text{ m}^3/\text{s}$$

B deposuna gelen sıvı verdisi $0,0686 \text{ m}^3/\text{s}$

C deposuna gelen sıvı ise (Q_3);

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 0,357 - 0,0686 = 0,2884 \text{ m}^3/\text{s}$$