

KONU 1: DUYARLILIK ANALİZİ-I

Amaç Fonksiyonundaki (Fiyat Vektöründeki) Değişim

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{X}) &= \mathbf{c}\mathbf{X} \\ \mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

biçiminde tanımlı bir doğrusal programlama problemi (d.p.p.) nin temel ve temel dışı değişken vektörleri ve bu değişken vektörlerine ilişkin fiyat vektörleri sırasıyla $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_B \quad \mathbf{X}_N]'$ ve $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B \quad \mathbf{c}_N]'$ biçiminde tanımlansın. Amaç fonksiyonunun katsayılarında olabilecek değişiklik \mathbf{c}_B ya da \mathbf{c}_N vektöründe olacaktır.

a. Durum-1: (\mathbf{c}_B vektöründeki değişim)

(En iyi çözümde yer alan bir karar değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısının değişiminin incelenmesi)

$\mathbf{c}_B = [c_{B_1} \dots c_{B_r} \dots c_{B_m}]$ olmak üzere, r. değişkenin fiyatı Δ kadar artsın ($\hat{c}_{B_r} = c_{B_r} + \Delta$).

$\hat{\mathbf{c}}_B = [c_{B_1} \dots (c_{B_r} + \Delta) \dots c_{B_m}]$ biçiminde tanımlansın.

Temel değişkenlere ilişkin $Z_j - c_j$ değerleri 0 olacaktır. Temel dışı değişkenlere ilişkin $Z_j - c_j$ değerleri etkilenecek ve değişecektir. (1) ifadesi ile tanımlı en büyükleme probleminde, en iyilik ölçütü, temel dışı değişkenlere ilişkin $Z_j - c_j \geq 0$ olmasıdır. Aynı zamanda, amaç fonksiyonunun katsayısında yapılan değişime göre $\hat{Z}_j - c_j \geq 0$ olmalıdır.

Buna göre,

$$\begin{aligned} \hat{Z}_j - c_j &= \hat{\mathbf{c}}_B \mathbf{y}_j - c_j \\ &= [c_{B_1} \dots (c_{B_r} + \Delta) \dots c_{B_m}] \begin{bmatrix} y_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{rj} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{mj} \end{bmatrix} - c_j \\ &= (c_{B_1} y_{1j} + \dots + (c_{B_r} + \Delta) y_{rj} + \dots + c_{B_m} y_{mj}) - c_j \\ &= \mathbf{c}_B \mathbf{y}_j + \Delta y_{rj} - c_j \\ \hat{Z}_j - c_j &= (Z_j - c_j) + \Delta y_{rj} \geq 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Eğer, (1) ifadesinde tanımlı model

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{X}) &= \mathbf{cX} \\ \mathbf{AX} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2)$$

biçiminde tanımlı olursa

$$\hat{Z}_j - c_j = (Z_j - c_j) + \Delta y_{ij} \leq 0$$

olmalıdır.

Tanımlanan problem türüne göre uygun koşullar sağlanacak biçimde Δ için aralık belirlenir.

b. Durum-2: (c_N vektöründeki değişim)

(En iyi çözümde yer almayan bir karar değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısının değişiminin incelenmesi)

(1) ifadesi ile tanımlı model için temel dışı değişkenlerin fiyatlarındaki değişim

$$Z_j - \hat{c}_j = \mathbf{c}_B \mathbf{y}_j - \hat{c}_j \geq 0$$

olmalıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} Z_j - \hat{c}_j &= \mathbf{c}_B \mathbf{y}_j - \hat{c}_j \\ &= \mathbf{c}_B \mathbf{y}_j - (c_j + \Delta) \\ &= \mathbf{c}_B \mathbf{y}_j - c_j - \Delta \\ Z_j - \hat{c}_j &= (Z_j - c_j) - \Delta \geq 0 \end{aligned}$$

olur.

(2) ifadesi ile tanımlı model için temel dışı değişkenlerin fiyatlarındaki değişim

$$Z_j - \hat{c}_j = (Z_j - c_j) - \Delta \leq 0$$

olmalıdır.

Örnek 1.1:

$$\begin{aligned} \max Z &= 6X_1 + 8X_2 \\ 30X_1 + 20X_2 &\leq 300 \\ 5X_1 + 10X_2 &\leq 110 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı primal problemin en iyi çözüm tablosu

En iyi çözüm tablosu			6	8	0	0
C_B	T_V	X_B	y_1	y_2	y_3	y_4
6	X_1	4	1	0	1/20	-2/20
8	X_2	9	0	1	-1/40	3/20
$Z^* = 96$			0	0	1/10	12/20

biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre,

- Temeldeki değişkenlerin (X_1 ve X_2) fiyatları hangi sınırlar arasında olursa en iyi çözüm değişmez?
- Temelde olmayan değişkenlerin (X_3 ve X_4) fiyatları hangi sınırlar arasında olursa en iyi çözüm değişmez?
- $\hat{c}_1 = 2$ olduğunda en iyi çözüm değişir mi?

Çözüm:

- Temeldeki değişkenlerin $Z_j - c_j$, $j=1,2$ değerleri etkilenmeyecek ve sıfır olacaktır. Temel dışı değişkenlerin $Z_j - c_j$, $j=3,4$ değerleri etkilenecek ve değişecektir.

X_1 temel değişkeni için:

En iyi çözüm tablosu			$6+\Delta$	8	0	0
C_B	T_V	X_B	y_1	y_2	y_3	y_4
$6+\Delta$	X_1	4	1	0	1/20	-2/20
8	X_2	9	0	1	-1/40	3/20
$Z^* = 96$			0	0	1/10	12/20

$$\left. \begin{aligned} \hat{Z}_3 - c_3 &= (Z_3 - c_3) + \Delta y_{33} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{\Delta}{10} \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -2 \\ \hat{Z}_4 - c_4 &= (Z_4 - c_4) + \Delta y_{34} \\ &= \frac{12}{20} - \frac{2\Delta}{20} \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 6 \end{aligned} \right\} -2 \leq \Delta \leq 6$$

$$\hat{c}_1 = c_1 + \Delta \Rightarrow \Delta = \hat{c}_1 - c_1$$

$$-2 \leq \Delta \leq 6 \Rightarrow -2 \leq \hat{c}_1 - c_1 \leq 6 \Rightarrow -2 \leq \hat{c}_1 - 6_1 \leq 6 \Rightarrow 4 \leq \hat{c}_1 \leq 12$$

X_2 temel değişkeni için:

En iyi çözüm tablosu			6	8+Δ	0	0
C_B	T_V	X_B	y_1	y_2	y_3	y_4
6	X_1	4	1	0	1/20	-2/20
8+Δ	X_2	9	0	1	-1/40	3/20
$Z^* = 96$			0	0	1/10	12/20

$$\left. \begin{aligned} \hat{Z}_3 - c_3 &= (Z_3 - c_3) + \Delta y_{33} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{\Delta}{40} \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 4 \\ \hat{Z}_4 - c_4 &= (Z_4 - c_4) + \Delta y_{34} \\ &= \frac{12}{20} + \frac{3\Delta}{20} \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -4 \end{aligned} \right\} -4 \leq \Delta \leq 4$$

$$\hat{c}_2 = c_2 + \Delta \Rightarrow \Delta = \hat{c}_2 - c_2$$

$$-4 \leq \Delta \leq 4 \Rightarrow -4 \leq \hat{c}_2 - c_2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq \hat{c}_2 - 8 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq \hat{c}_1 \leq 12$$

b.

X_3 temel dışı değişkeni için:

En iyi çözüm tablosu			6	8	0+Δ	0
C_B	T_V	X_B	y_1	y_2	y_3	y_4
6	X_1	4	1	0	1/20	-2/20
8	X_2	9	0	1	-1/40	3/20
$Z^* = 96$			0	0	1/10	12/20

$$Z_3 - \hat{c}_3 = (Z_3 - c_3) - \Delta = \frac{1}{10} - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \hat{c}_3 - c_3 \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \hat{c}_3 - 0 \leq \frac{1}{10} \Rightarrow -\infty < \hat{c}_3 \leq \frac{1}{10}$$

X_4 temel dışı değişkeni için:

En iyi çözüm tablosu			6	8	0	0+ Δ
C_B	T_V	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
6	X_1	4	1	0	1/20	-2/20
8	X_2	9	0	1	-1/40	3/20
$Z^* = 96$			0	0	1/10	12/20

$$Z_4 - \hat{c}_4 = (Z_4 - c_4) - \Delta = \frac{12}{20} - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{c}_4 - c_4 \leq \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{c}_4 - 0 \leq \frac{3}{5} \Rightarrow -\infty < \hat{c}_4 \leq \frac{3}{5}$$

c. $\hat{c}_1 = 2$, $\hat{c}_1 \in [4, 12]$ aralığının dışında kaldığı için en iyi çözüm değişir. Ayrıca,

En iyi çözüm tablosu			2	8	0	0
C_B	T_V	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
2	X_1	4	1	0	1/20	-2/20
8	X_2	9	0	1	-1/40	3/20
$Z^* = 96$			0	0	-1/10	1

olup, en iyilik ölçütü sağlanamamıştır. Bu nedenle, $\hat{c}_1 = 2$ olması en iyi çözüm değerini etkileyecektir.