KONU 2: DUYARLILIK ANALİZİ-II

Sağ Yan Değerlerindeki (İhtiyaçlar Vektöründeki) Değişim

Sağ yan değerlerindeki değişim, üç farklı durumda incelenecektir.

Durum 1: (Temeldeki gevşek değişkene ilişkin kısıtın sağ yan değerindeki değişim)

Gevşek değişkenin en iyi çözüm tablosunda temelde olması, bu değişkenin bulunduğu kısıta ilişkin sağ yan değerinin (kısıt kapasitesinin) tam olarak kullanılmadığının göstergesidir. Gevşek değişkeni içeren *i*. kısıtın sağ yan değeri, Δ kadar değişsin. Bu durumda, $\mathbf{X}_B$ çözümünün optimal olabilmesi için,

$$X_{B_i} + \Delta \geq 0$$

olmalıdır. Burada, $\Delta = \hat{b}_i - b_i$ olup, b_i, verilen problemdeki *i*. kısıtın sağ yan değeridir.

Durum 2: (Temel dışındaki gevşek değişkene ilişkin kısıtın sağ yan değerindeki değişim)

Gevşek değişken en iyi çözüm tablosundaki temelde yer almıyorsa (temel dışı değişken ise), bu değişkene ilişkin kısıtın sağ yan değerinin tam olarak kullanıldığı anlaşılır. Sağ yan değerlerinin tam olarak kullanılması, "gölge fiyatları" gündeme getirir. Buna göre, sağ yan değerindeki 1 br lik artışın amaç fonksiyonundaki değişime etkisi olacaktır. Primal problemin en iyi çözüm tablosundaki $Z_j - c_j$ değerleri gölge fiyatları verecektir.

En iyi çözüm tablosunda, temel dışındaki X_j gevşek değişkenine ilişkin $\mathbf{y}_j$ katsayıları, $\mathbf{y}_j = \left[y_{1j} \; y_{2j} \; ... \; y_{mj} \right]'$ olsun. Temel uygun çözüm, $\left[X_{B_1} \; X_{B_2} \; ... \; X_{B_m} \right]'$ olarak verilsin.

$$\left.\begin{array}{l} X_{B_1} + \Delta y_{1j} \geq 0 \\ X_{B_2} + \Delta y_{2j} \geq 0 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ X_{B_m} + \Delta y_{mj} \geq 0 \end{array}\right\} \mathbf{X}_B + \Delta \mathbf{y}_j \geq 0$$

eşitsizliklerini sağlayan Δ sınırları bulunur. $\hat{b}_i = b_i + \Delta \geq 0$ eşitsizliğine göre, $\hat{b}_i$ değişim aralığı belirlenir.

Durum 3: (Aynı anda birden fazla sağ yan değerindeki değişim)

Durum 1 ve Durum 2' de b_i, i=1,2,…,m değerlerinin teker teker değişimleri ile ilgilenildi. Aynı anda birden fazla sağ yan değerindeki değişimi incelemek için $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta} \geq \mathbf{0}$ olup olmadığına bakılmalıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}_B &= B^{-1}\hat{\mathbf{b}} \\
&= B^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{\Delta}) \\
&= B^{-1}\mathbf{b} + B^{-1}\mathbf{\Delta} \\
\hat{\mathbf{X}}_B &= \mathbf{X}_B + B^{-1}\mathbf{\Delta} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

olacak biçimde $\mathbf{\Delta}$ değişim sınırları belirlenir. Burada,

$\mathbf{X}_B$: En iyi çözüm tablosundaki temel uygun çözüm

B^{-1} : Başlangıç tablosunda temel değişkenlerin en iyi çözüm tablosundaki $\mathbf{y}_j$ katsayıları dır.

Örnek 2.1:

$$\begin{aligned}
\max\ Z &= 4X_1 + 3X_2 \\
X_1 + X_2 &\leq 5 \\
3X_1 + X_2 &\leq 7 \\
X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\
X_1, X_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı primal problemin en iyi çözüm tablosu

En iyi çözüm tablosu			4	3	0	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$
3	X_2	4	0	1	3/2	-1/2	0
4	X_1	1	1	0	-1/2	1/2	0
0	X_5	1	0	0	-5/2	1/2	1
		$Z^* = 16$	0	0	5/2	1/2	0

biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre,

- **a.** Üçüncü kısıtın sağ yan değerinde olabilecek değişimi inceleyiniz.
- **b.** İkinci kısıtın sağ yan değerleri hangi sınırlar arasında olmalı ki en iyi çözüm değişmesin?
- **c.** Birinci kısıtın sağ yan değerinde bir birimlik artış ve üçüncü kısıtın sağ yan değerinde bir birimlik azalma olması durumunda en iyi çözümde olabilecek değişimi inceleyiniz.

NOT: Verilen primal problem simpleks tablo ile çözümlenirken, öncelikle primal problem

$$\begin{aligned} \max\ Z &= 4X_1+3X_2+0X_3+0X_4+0X_5 \\ X_1+X_2+X_3 &= 5 \\ 3X_1+X_2+X_4 &= 7 \\ X_1+2X_2+X_5 &= 10 \\ X_i \geq 0\ ,\ i &= 1,2,\ldots,5 \end{aligned}$$

biçiminde standart forma getirilmiştir. Burada, X_3, X_4 ve X_5 değişkenleri gevşek değişkenlerdir. Sağ yan değerlerinde olabilecek değişimin incelenmesi durumunda, ilgili kısıta ilişkin gevşek değişkenlerin en iyi çözüm tablosunda olup olmamasına göre değerlendirme yapılmalıdır.

a. Primal problemde, üçüncü kısıta ilişkin gevşek değişken, X_5 tir. Bu değişken, temelde bulunan gevşek değişken konumundadır (Durum 1). Buna göre,

$$X_{B_3}+\Delta \geq 0$$

olmalıdır. $\Delta = \hat{b}_3 - 10$ olduğundan,

$$\begin{aligned} X_{B_3}+\Delta &\geq 0 \\ 1+\left(\hat{b}_3-10\right) &\geq 0 \\ \boxed{\hat{b}_3 \geq 9} \end{aligned}$$

bulunur.

b. Primal problemde, ikinci kısıta ilişkin gevşek değişken, X_4 tür. Bu değişken, temelde bulunmayan gevşek değişken konumundadır (Durum 2). Buna göre,

$$\left.\begin{aligned} X_{B_1}+\Delta y_{14} \geq 0 &\Rightarrow 4+\Delta\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 8 \\ X_{B_2}+\Delta y_{24} \geq 0 &\Rightarrow 1+\Delta\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -2 \\ X_{B_3}+\Delta y_{34} \geq 0 &\Rightarrow 1+\Delta\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -2 \end{aligned}\right\} -2 \leq \Delta \leq 8$$

bulunur. Buradan,

$$\hat{b}_2 = b_2+\Delta \Rightarrow \Delta = \hat{b}_2 - 7$$

$$-2 \leq \Delta \leq 8 \Rightarrow -2 \leq \hat{b}_2 - 7 \leq 8 \Rightarrow \boxed{5 \leq \hat{b}_2 \leq 15}$$

elde edilir.

c. $\hat{\mathbf{X}}_B = \mathbf{X}_B + B^{-1}\mathbf{\Delta} \geq \mathbf{0}$ olmalıdır.

$$\hat{\mathbf{X}}_B = \mathbf{X}_B + B^{-1}\mathbf{\Delta}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 11/2 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} >0 \\ >0 \\ <0 \end{matrix}$$

olup, $\hat{\mathbf{X}}_B$, uygun çözüm değildir. Bu durumda, verilen en iyi çözüm tablosunda, $\mathbf{X}_B$ yerine $\hat{\mathbf{X}}_B$ alınarak, Tablo yeniden düzenlenir. Burada, $\hat{\mathbf{X}}_B \geq \mathbf{0}$ olmadığından, dual simpleks yöntem kullanılarak en iyi çözüm tablosu elde edilmeye çalışılır.

			4	3	0	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$
3	X_2	11/2	0	1	3/2	-1/2	0
4	X_1	1/2	1	0	-1/2	1/2	0
0	X_5	-5/2	0	0	-5/2	1/2	1
		$Z^* = 37/2$	0	0	5/2	1/2	0

En iyi çözüm tablosu			4	3	0	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
3	X_2	4	0	1	0	-2/10	3/5	
4	X_1	1	1	0	0	2/5	-1/5	
0	X_3	1	0	0	1	-1/5	-2/5	
		$Z^* = 16$	0	0	0	1	1	≥ 0 sağlandı

Buna göre, en iyi çözüm, $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ elde edilir.