KONU 3: DUYARLILIK ANALİZİ-III

Katsayılar Matrisindeki Değişim

Katsayılar matrisindeki değişim iki durumda incelenir.

Durum 1: (Temel dışındaki X_k değişkenine ilişkin $\mathbf{a}_k$ katsayısındaki değişim)

Temel dışındaki X_k değişkeninin katsayısı $\mathbf{a}_k$ olsun. $\mathbf{a}_k$ katsayısında Δ kadar değişim yapılsın, $\hat{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k + \Delta$. Yapılan bu değişim, primal uygunluğu ($\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$ olması durumu) etkiler mi?

$\mathbf{y}_k = B^{-1}\mathbf{a}_k$ olduğundan, $\mathbf{a}_k$**'** daki değişim $\mathbf{y}_k$' yı etkiler. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}_k &= B^{-1}\hat{\mathbf{a}}_k \\
&= B^{-1}\left(\mathbf{a}_k + \mathbf{\Delta}\right) \\
&= B^{-1}\mathbf{a}_k + B^{-1}\mathbf{\Delta} \\
\hat{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{y}_k + B^{-1}\mathbf{\Delta}
\end{aligned}
$$

dır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\hat{Z}_k - c_k &= \mathbf{c}_B\hat{\mathbf{y}}_k - c_k \\
&= \mathbf{c}_B\left(\mathbf{y}_k + B^{-1}\mathbf{\Delta}\right) - c_k \\
&= \mathbf{c}_B\mathbf{y}_k + \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{\Delta} - c_k \\
\hat{Z}_k - c_k &= \left(Z_k - c_k\right) + \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{\Delta}
\end{aligned}
$$

elde edilir. En iyi değeri elde edilmek istenilen amaç fonksiyon türü minimizasyon ise, $\hat{Z}_k - c_k \leq 0$ olmalıdır. Maksimizasyon problemi için, $\hat{Z}_k - c_k \geq 0$ olma koşulu aranır. Problem türlerine göre, en iyilik koşulları sağlanıyorsa, $\mathbf{a}_k$**'** daki değişim en iyi çözüm sonucunu etkilememiştir. Son bulunan çözüm yine en iyi çözümdür. En iyilik koşulu bozuluyorsa, en iyi çözüme ulaşabilmek için, $\mathbf{y}_k$ yerine $\hat{\mathbf{y}}_k$ alınarak, en iyilik ölçütü sağlanıncaya kadar bilinen simpleks tablo algoritması uygulanır.

Durum 2: (Temeldeki X_k değişkenine ilişkin $\mathbf{a}_k$ katsayısındaki değişim)

X_k, en iyi çözüm tablosunda, temelin *r*. elemanı olsun. $\hat{\mathbf{y}}_k = B^{-1}\hat{\mathbf{a}}_k$ hesabında iki durum söz konusudur.

- **i.** $y_{rk} = 0$ ise, son temel değişir. Temele bir yapay değişken eklenir. Bu yapay değişken temeldeki X_k değişkeni ile yer değiştirir. Bundan sonra optimal çözümü bulmak için, Charnes'in M Algoritması ya da İki Evreli Algoritma kullanılır.

ii. $y_{rk} \neq 0$ ise, $\mathbf{y}_k$ yerine $\hat{\mathbf{y}}_k$ alınır. $\hat{y}_{rk}$ pivot eleman olur. Burada, en iyi çözüm bulununcaya kadar simpleks tablo algoritması uygulanır.

Örnek 3.1:

$$\begin{aligned} \max\ & Z = 5X_1 + 4X_2 + 2X_3 \\ & 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 4 \\ & 4X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 12 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı primal problemin en iyi çözüm tablosu

En iyi çözüm tablosu			5	4	2	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$
5	X_1	1	0	1	1/2	1	-1/4
4	X_2	2	1	0	0	-1	1/2
		$Z^* = 13$	0	0	1/2	1	3/4

biçiminde tanımlanmıştır.

a. Temel dışı X_3 değişkenine ilişkin katsayı vektörü, $\hat{\mathbf{a}}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ olursa, optimal çözüm değişir mi?

b. Temeldeki X_2 değişkenine ilişkin katsayı vektörü, $\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ olursa, optimal çözüm değişir mi?

c. Temeldeki X_2 değişkenine ilişkin katsayı vektörü, $\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ olursa, optimal çözüm değişir mi?

Çözüm:

a. $\hat{Z}_3 - c_3 = \mathbf{c}_B \hat{\mathbf{y}}_3 - c_3 \geq 0$ olmalıdır.

Buradan, $\hat{\mathbf{y}}_3 = B^{-1}\hat{\mathbf{a}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 \\ -5/2 \end{bmatrix}$ elde edilir. Buna göre,

$$\hat{Z}_3 - c_3 = \mathbf{c}_B \hat{\mathbf{y}}_3 - c_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11/4 \\ -5/2 \end{bmatrix} - 2 = 7/4 > 0$$

olduğundan, yapılan değişim sonucu en iyi çözüm değişmez.

b. X_2 değişkeni, temelin 2. elemanıdır (r=2). Buna göre,

$$\hat{\mathbf{y}}_2 = B^{-1}\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\hat{y}_{22} = 0$ olduğundan, son temel değişir. $\hat{y}_{22} = 0$ olması istenmeyen bir durumdur. Çünkü, pivot eleman sıfır olamaz. Temele yapay değişken eklenir. Bu yapay değişken ile temeldeki X_2 değişkeni yer değiştirir. Charnes'in M Algoritması uygulanır.

			5	4	2	0	0	-M
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	q_2
5	X_1	1	0	2	1/2	1	-1/4	0
-M	q_2	2	1	0	0	-1	1/2	1
		$Z^* = 5 - 2M$	0	6	1/2	5+M	(-5-2M)/4	0

En iyi çözüm tablosu			5	4	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
5	X_1	2	0	2	1/2	1/2	0	
0	X_5	4	1	0	0	-2	1	
		$Z^* = 10$	0	6	1/2	5/2	0	≥ 0 sağlandı

Primal uygunluk ve dual uygunluk sağlanmıştır.

Buna göre, en iyi çözüm, $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

c. X_2 değişkeni, temelin 2. elemanıdır (r=2). Buna göre,

$$\hat{\mathbf{y}}_2 = B^{-1}\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\hat{y}_{22} = -3 \neq 0$ olduğundan, son temel değişir. $\mathbf{y}_2$ yerine $\hat{\mathbf{y}}_2$ alınır. $\hat{y}_{22} = -3$ pivot eleman olur. Tablo yeniden düzenlenir.

			5	4	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
5	X_1	1	1	7/2	1/2	1	-1/4	
4	X_2	2	0	-3	0	-1	1/2	
		$Z^* = 13$	0	3/2	1/2	1	3/4	≥ 0 olmalı

			5	4	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
5	X_1	10/3	1	0	1/2	-1/6	1/3	
4	X_2	-2/3	0	1	0	1/3	-1/6	
		$Z^* = 13$	0	0	1/2	1/2	1	≥ 0 sağlandı

En iyi çözüm tablosu			5	4	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
5	X_1	2	1	2	1/2	1/2	0	
0	X_5	4	0	-6	0	-2	1	
		$Z^* = 10$	0	6	1/2	5/2	0	≥ 0 sağlandı