KONU 9: KLASİK OPTİMİZASYON - III

Çok Değişkenli Dışbükey Fonksiyonlar ve Özellikleri

$\mathbf{x}=\left[x_1\ x_2 \ldots x_n\right]$ olmak üzere $f(\mathbf{x})$, $S \subset R^n$ de tanımlı, sürekli ve ikinci türevleri alınabilen bir fonksiyon olsun. $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun, x_i, $i=1,2,\ldots,n$ ye göre kısmi türevi

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{h}, \quad i=1,2,\ldots,\mathrm{n}$$

biçiminde tanımlıdır. Buna göre gradyan vektörü ($\nabla f(\mathbf{x})$)

$$\nabla f(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}'$$

dir. $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun Hessian matrisi (ikinci kısmi türev matrisi)

$$\nabla^2 f(\mathbf{x})=H(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}
\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\
\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2}
\end{bmatrix}_{n\times n}$$

olur. Eğer verilen bir noktada $f(\mathbf{x})$' in ikinci kısmi türevleri var ve $f(\mathbf{x})$ bu noktalarda sürekli ise, $\forall\ i \neq j$ için

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i,j=1,2,\ldots,n$$

olup, H matrisi simetriktir.

Çok değişkenli bir $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun konveksliğinin ya da konkavlığının incelenmesinde H matrisinin tanımlılık durumunun belirlenmesi gerekir.

- $\forall\, \mathbf{x} \in S$ için H matrisi pozitif yarı tanımlı $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ dışbükey bir fonksiyondur

  ($\forall\, \mathbf{x} \in S$ için H matrisi pozitif tanımlı $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ kesin dışbükey bir fonksiyondur)

- $\forall\, \mathbf{x} \in S$ için H matrisi negatif yarı tanımlı $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ içbükey bir fonksiyondur

  ($\forall\, \mathbf{x} \in S$ için H matrisi negatif tanımlı $\Rightarrow f(\mathbf{x})$ kesin içbükey bir fonksiyondur)

NOT 1: (Karesel Fonksiyon)

Eğer, n değişkenli $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ biçiminde yazılabilirse, "$f(\mathbf{x})$ fonksiyonu karesel formda tanımlanabilen bir fonksiyondur" denir. Burada, $A = \left[a_{ij}\right]$, $n \times n$ boyutlu, karesel ve simetrik bir matristir. A matrisi simetrik olmadığında, $\left[a_{ij} + a_{ji}\right]/2$ biçiminde değiştirilerek, simetrik biçime dönüştürülür.

NOT 2: (Karesel Fonksiyonun Türleri)

- $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ için $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} > 0$ ise, $f(\mathbf{x})$ karesel fonksiyonuna pozitif tanımlıdır denir. A matrisi de pozitif tanımlıdır.
- Bazı $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ için $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} > 0$ ve bazı $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ için $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = 0$ ise, $f(\mathbf{x})$ karesel fonksiyonuna pozitif yarı tanımlıdır denir. A matrisi de pozitif yarı tanımlıdır.
- Bazı $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ için $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} > 0$ ve bazı $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ için $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} < 0$ ise, $f(\mathbf{x})$ karesel fonksiyonu tanımsızdır (belirsizdir) denir.

Buna göre, $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu için tanımlanan H matrisinin veya $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ karesel fonksiyonu için tanımlanan A matrisinin tanımlılık durumları nasıl belirlenmelidir?

H veya A, $n \times n$ boyutlu, karesel matrislerinin tanımlılık durumunun incelenmesinde **Asal Minör** hesaplarından yararlanılır.

NOT 3: (Asal Minörler ve Karesel Bir Matrisin Tanımlılık Durumunun İncelenmesi)

Bir $n \times n$ boyutlu, karesel matrisin *k*. asal minörü, son (*n*-*k*) satırın ve (*n*-*k*) sütunun matristen çıkarılması ile elde edilen $k \times k$ boyutlu matrisin determinantıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, bu matrisin asal minörleri

$$\Delta_1 = a_{11}\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots\,,\ \Delta_n = |A|$$

dır.

Asal minörler elde edildikten sonra ortaya çıkabilecek sonuçlar aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

i. *A*' nın tüm asal minörleri > 0 $\Rightarrow$ *A* matrisi pozitif tanımlıdır.

($\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_n > 0 \Rightarrow A$ matrisi pozitif tanımlıdır.)

ii. *A*' nın tüm asal minörleri $\geq$ 0 $\Rightarrow$ *A* matrisi pozitif yarı tanımlıdır.

($\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \Delta_3 \geq 0, \ldots, \Delta_n \geq 0 \Rightarrow A$ matrisi pozitif yarı tanımlıdır.)

iii. *A*' nın *k*. mertebe asal minörü $(-1)^k$ ile aynı işaretli $\Rightarrow$ *A* matrisi negatif tanımlıdır.

($\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots \Rightarrow A$ matrisi negatif tanımlıdır.)

iv. *A*' nın *k*. mertebe asal minörü $(-1)^k$ ile aynı işaretli ya da sıfır $\Rightarrow$ *A* matrisi negatif yarı tanımlıdır.

($\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \Delta_3 \leq 0, \ldots \Rightarrow A$ matrisi negatif yarı tanımlıdır.)

v. Bunlardan hiç birine uymuyorsa belirsizlik durumu vardır.

Buna göre, bir $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun ekstremum noktalarının belirlenmesinde gerek ve yeter koşullar:

Gerekli Koşullar:

$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ olacak biçimde $\mathbf{x}^*$ vektörü bulunur.

Yeterli Koşullar:

$H(\mathbf{x}^*)$ pozitif tanımlı ise, $\mathbf{x}^*$ bir minimum noktadır.

$H(\mathbf{x}^*)$ negatif tanımlı ise, $\mathbf{x}^*$ bir maksimum noktadır.

$H(\mathbf{x}^*)$ tanımsız ise, $\mathbf{x}^*$ bir büküm noktasıdır.

NOT 4: Eğer, $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ biçiminde karesel form olarak yazılabiliyorsa, Hessian matrisini bulmadan A matrisinin tanımlılık durumunun incelenmesi ile de fonksiyonun minimum ya da maksimum çözüm değerlerinin olup olmadığına karar verilir. Karesel bir $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$ fonksiyonu için, H=2A dır.

Örnek 9.1: $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ biçiminde tanımlı fonksiyonun ekstremum (minimum/maksimum) noktasını/noktalarını elde ederek, fonksiyonun türünü belirleyiniz.

Çözüm:

I.Yol:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup, $\mathbf{x}^* = (0,0)$ değeri elde edilir. Hessian matrisi

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

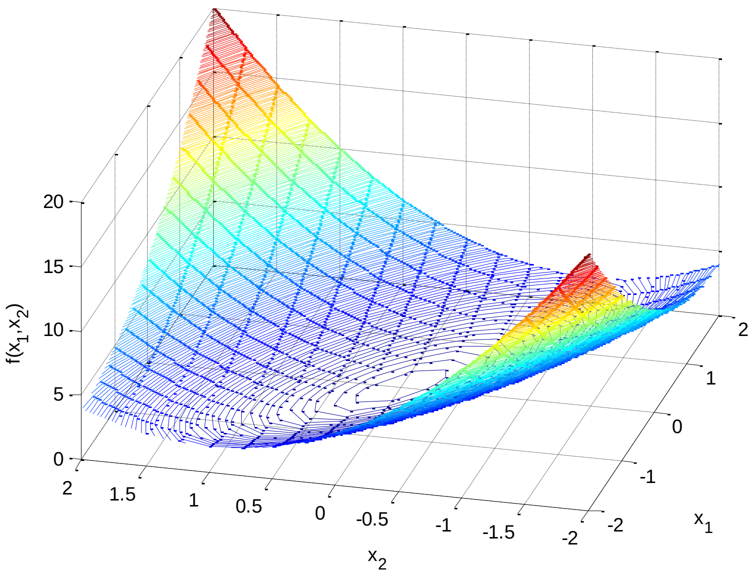
elde edilir. Burada, asal minör değerleri $\Delta_1 = 2 > 0$ ve $\Delta_2 = |H| = 8 - 4 = 4 > 0$ olup, H matrisinin pozitif tanımlı olduğu söylenir. Buna göre, verilen $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu pozitif tanımlı olup, $\mathbf{x}^* = (0,0)$ bir minimum çözüm vektörüdür. $f(\mathbf{x})$ dışbükey bir fonksiyondur.

II. Yol:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\
&= \mathbf{x}'A\mathbf{x} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dır. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ olup, asal minörlerin hesaplanmasıyla ($\Delta_1 = 1 > 0$ ve $\Delta_2 = |A| = 2 - 1 = 1 > 0$), A matrisinin de pozitif tanımlı olduğu söylenir. Buna göre, $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu pozitif tanımlı olup, dışbükey bir fonksiyondur. Dikkat edilirse, H=2A olduğu açıktır.

Şekil 9.1 de $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun yüzey grafiği görülmektedir. Şekil 9.1' den de görüleceği gibi, fonksiyon $\mathbf{x}^* = (0,0)$ noktasında minimum değere ulaşmaktadır.



Şekil 9.1 $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ fonksiyonunun yüzeyi

Örnek 9.2: $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ fonksiyonunun tanımlılık durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 & 2x_2 - x_1 - x_3 & 4x_3 - x_2 - x_1 \end{bmatrix}'$$

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0,\ \Delta_3 = |H| = 6 > 0$ olup, H matrisi pozitif tanımlıdır. Buna göre, $f(\mathbf{x})$ dışbükey bir fonksiyondur.

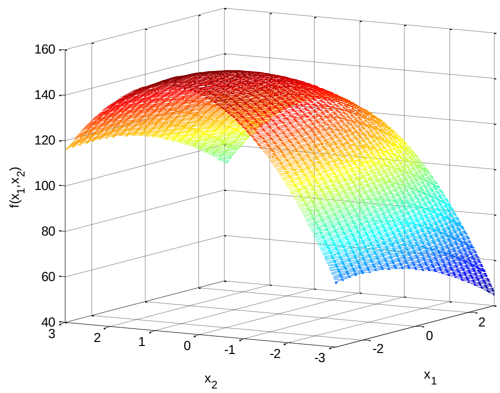
Örnek 9.3: $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_1 + 8x_2 + 143$ biçiminde tanımlı fonksiyonun ekstremum (minimum/maksimum) noktasını/noktalarını elde ederek, fonksiyonun türünü belirleyiniz.

Çözüm:

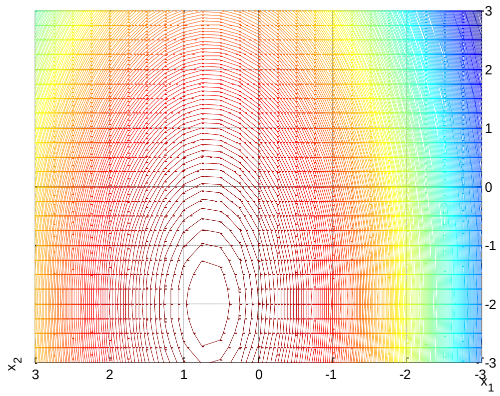
$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2x_1 - 4 \\ -12x_2 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} -2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ olup, $\Delta_1 = -2 < 0$ ve $\Delta_2 = |H| = 24 > 0$ bulunur. Buna göre, H matrisi negatif tanımlıdır. $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu negatif tanımlı olup, içbükey bir fonksiyondur. $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} -2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ maksimum noktadır. Buradan, $f(\mathbf{x}^*) = 149.6667$ elde edilir. Şekil 9.2' de $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun yüzey grafiği ve Şekil 9.3' de $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun kontur grafiği görülmektedir.



Şekil 9.2 $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun yüzey grafiği



Şekil 9.3 $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun kontur grafiği