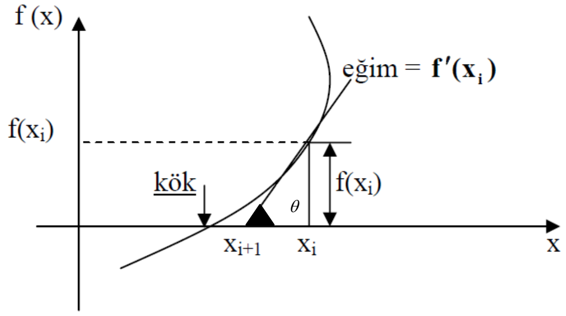
## KONU 10: DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

### Newton-Raphson Yöntemi

Eş anlı doğrusal olmayan eşitliklerin çözüm kümesinin bulunmasında kullanılan yöntemlerden biri de Newton-Raphson (N-R) yöntemidir. N-R yöntemi, doğrusal olmayan denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için iteratif (yinelemeli) bir yaklaşım sunar.

### 10.1 Tek Değişkenli Doğrusal Olmayan Denklemlerin Çözümü

Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu Şekil 10.1' deki gibi tanımlansın. $f(x)=0$ denklemini sağlayan $x$ değerinin elde edilmesi (kök değerinin bulunması) ile ilgilenilsin. $f(x)=0$ denkleminin köklerinden biri yaklaşık bir değer olarak $x_0$ olsun. $x_0$ değeri, Şekil 10.1' de $x_i$ ile belirtilmiştir. $x_i$ noktasından çizilen dikey çizginin eğriyi kestiği noktadaki teğetinin, $x$-eksenini kestiği nokta ( $x_{i+1}$ noktası) kök noktasına daha yakındır. Buna göre amaç, $x_i$ noktası biliniyorken, köke daha yakın olan $x_{i+1}$ noktasını elde etmek olmalıdır.




Şekil 10.1 Newton-Raphson formülünün geometrik açıklaması

$x_{i+1}$ noktası da, $f(x)$ fonksiyonunun $x_i$ noktasındaki eğiminden bulunacaktır. Burada,

$\tan\theta = f'(x_i)$

dir. Buna göre,

$$\tan\theta = f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{10.1}$$

elde edilir. Eşitlik (10.1) ile tanımlı yinelemeli nokta değeri $x_{i+1}$, Taylor derisi kullanılarak da elde edilebilir.

**NOT 1:** Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0$ civarındaki Taylor açılımı

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0)+\ldots$$

Buna göre, 1. dereceli Taylor açılımından (2 ve sonraki dereceli türevler ihmal edilebilir)

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)=0$$

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{10.2}$$

elde edilir. Genel ifade,

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{10.3}$$

biçiminde tanımlı olup, N-R yöntemi ile elde edilen denklemdir.

**Newton-Raphson yönteminin hata analizi**

Verilen $f(x)$ fonksiyonunun gerçel köklerinden birinin $\xi$ olduğunu kabul edilsin. Bu köke yaklaşmakta kullanılan N-R formülü ile gerçek sonuçtan ne kadar uzaklaşıldığı incelenmek istenilsin. Burada, hata miktarı $h$ ile gösterilsin.

*i*. yinelemede yapılan hata miktarı,

$$h_i=x_i-\xi$$

olur. Buna göre, (*i*+1). adımda yapılan hata miktarı,

$$h_{i+1}=x_{i+1}-\xi$$

dir. Buradan,

$$h_{i+1}-h_i=(x_{i+1}-\xi)-(x_i-\xi)=x_{i+1}-x_i$$

elde edilir. Eşitlik (10.3) ile tanımlı genel ifade kullanılarak (*i*+1). adımda yapılan hata miktarı

$$h_{i+1}=h_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{10.4}$$

biçiminde yazılabilir.

**Newton-Raphson yakınsaklık koşulu**

Eğer, $f(x)$ fonksiyonunun iki kökü var ise ve bu kökler birbirine çok yakın ise, ortalama değer teoremine göre bu iki kök arasında, $f'(\zeta)=0$ olacak biçimde bir $\zeta$ değeri vardır.

Eşitlik (10.2) deki $x$ değeri

$$g(x)=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

biçiminde tanımlanırsa, N-R yöntemi ile kök bulmak için seçilecek başlangıç noktasının yakınsaklık koşulu

$$\left|g'(x_0)\right|=\left|\frac{f(x_0)\times f''(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^2}\right|<1 \tag{10.5}$$

olarak tanımlanır.

**Newton-Raphson algoritması**

**Adım 1:** $f(x)$ fonksiyonu için Eşitlik (10.5) ile tanımlı yakınsaklık koşulu dikkate alınarak bir başlangıç noktası belirlenir.

**Adım 2:** Gerçel köke yaklaşık bir değer, Eşitlik (10.3) ile tanımlı yaklaşım formülü kullanılarak elde edilir.

**Adım 3:** $\Delta_{i+1}=\left|x_{i+1}-x_i\right|<\varepsilon$ ise durulur. Son bulunan çözüm, kabul edilen küçük bir $\varepsilon>0$ sabitine göre, köke en yakın değer olarak kabul edilir.

**10.1 Çok Değişkenli Doğrusal Olmayan Denklem Sisteminin Çözümü**

**Adım 1:**

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ . \\ . \\ . \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklem sistemi belirlenir.

**Adım 2:** $\mathbf{x}_0$ başlangıç noktası, $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ durdurma koşulu belirlenir.

**Adım 3:** Denklem sisteminin 1. türev matrisi (*J*) tanımlanır ve ilgili çözüm noktası için matrisin tersi ($[J]^{-1}$) belirlenir.

**Adım 4:** Yeni çözüm değeri, $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [J]^{-1}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ hesaplanır.

**Adım 5:** $\boldsymbol{\Delta}_{i+1} = |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| < \boldsymbol{\varepsilon}$ ise, durulur. Son bulunan çözüm verilen durdurma koşuluna göre köke en yakın çözüm olarak kabul edilir. Aksi halde, durdurma koşulu sağlanıncaya kadar yinelemeli işlemlere devam edilir.

**Örnek 10.1:** $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ eşitliği ile tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun gerçel kökünü N-R yöntemini kullanarak elde ediniz. Burada, $x_0 = 0$ ve $\varepsilon = 0.01$ alınız.

**Çözüm:**

$$f(x_0) = f(0) = -20$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = 10$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{(-20)}{10} = 2$$

$\Delta_1 = |x_1 - x_0| = |2 - 0| = 2 > \varepsilon$ olduğundan, 2. yinelemeye geçilir.

$$f(x_1) = f(2) = 16$$
$$f'(x_1) = f'(2) = 30$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{16}{30} = 1.46$$

$\Delta_2 = |x_2 - x_1| = |1.46 - 2| = 0.54 > \varepsilon$ olduğundan, 3. yinelemeye geçilir.

$$f(x_2) = f(1.46) = 1.97$$
$$f'(x_2) = f'(1.46) = 22.23$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.46 - \frac{1.97}{22.23} = 1.37$$

$\Delta_3 = |x_3 - x_2| = |1.37 - 1.46| = 0.09 > \varepsilon$ olduğundan, 4. yinelemeye geçilir.

$$f(x_3) = f(1.37) = 0.0462$$
$$f'(x_{2.3}) = f'(1.37) = 21.12$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.37 - \frac{0.0462}{21.12} = 1.3678$$

$\Delta_4 = |x_4 - x_3| = |1.3678 - 1.37| = 0.003 < \varepsilon$ olduğundan durulur.

Buna göre, son yinelemede elde edilen $x_4 = x^* = 1.3678$ en iyi çözüm noktasıdır.

$f(x^*) = -0.0213 \cong 0$ bulunur.

**Örnek 10.2:**

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0$$
$$f_2(\mathbf{x}) = x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0$$

biçiminde tanımlı doğrusal olmayan denklem sisteminin çözüm kümesini N-R yöntemini kullanarak elde ediniz. Burada, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon} = 0.2$ alınız.

**Çözüm:**

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 10 & 2x_2 \\ x_2^2 + 1 & 2x_1 x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \left[J(\mathbf{x}_0)\right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/10 & 0 \\ -1/100 & -1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.80 \\ 0.88 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\Delta}_1 = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| = \left| \begin{bmatrix} 0.80 \\ 0.88 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.80 \\ 0.88 \end{bmatrix} \right| > \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ olduğundan, 2. yinelemeye geçilir.

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \left[J(\mathbf{x}_1)\right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$$
$$= \begin{bmatrix} 0.80 \\ 0.88 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.124 & -0.025 \\ -0.026 & -0.122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4144 \\ 0.61952 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.99 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_2 = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = \left|\begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.99 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.80 \\ 0.88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.11 \end{bmatrix}\right| < \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$ olduğundan durulur.

Son bulunan değer, en iyi çözümdür.

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.99 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$f\left(\mathbf{x}^*\right) = \begin{bmatrix} 0.0602 \\ 0.0603 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ bulunur.