KONU 12: EŞİTLİK KISITLI ÇOK DEĞİŞKENLİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Lagrange Yöntemi

$$\begin{aligned} &\min/\max\ Z = f(\mathbf{X}) \\ &g_i(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad , \quad i = 1,2,...,m \end{aligned} \tag{12.1}$$

biçiminde tanımlı eşitlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon probleminin çözümü için Lagrange Yöntemi' nden yararlanılır. Burada, $\mathbf{X} = [X_1\ X_2\ ...\ X_n]'$, $m < n$ olup $f(\mathbf{X})$ amaç fonksiyonu ile $g_i(\mathbf{X})$, $i = 1,2,...,m$ kısıt fonksiyonları ikinci dereceden sürekli türevlenebilen fonksiyonlar olarak varsayılır. Lagrange Yöntemi, 1961 yılında Lagrange tarafından geliştirilmiştir. Eşitlik kısıtları ile tanımlanan optimizasyon problemi, eşitsizlik kısıtlı bir optimizasyon problemine dönüştürülerek gerekli ve yeterli koşulların sağlatılmasıyla Eşitlik (12.1)' de verilen problem için en iyi çözüm elde edilir.

(12.1) ifadesinde tanımlı bir problemi Lagrange Yöntemi ile optimize etmek için öncelikli olarak Lagrange fonksiyonu (L)

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}(\mathbf{X})$$

biçiminde oluşturulur. Burada, $\boldsymbol{\lambda}$ Lagrange çarpanı (duyarlılık çarpanı) olarak adlandırılır.

Gerekli Koşullar:

1. $\nabla_{\mathbf{X}} L = \mathbf{0}$ $\left(\dfrac{\partial L}{\partial X_j} = \dfrac{\partial f}{\partial X_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial X_j} = 0\ ,\ j = 1,2,...,n\right)$

2. $\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L = \mathbf{0}$ $\left(\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{X}) = 0\ ,\ i = 1,2,...,m\right)$

Gerekli koşullara göre elde edilen $m+n$ bilinmeyenli $m+n$ denklemden oluşan eşitlik sistemi çözülür. Bu çözümün sonucunda, elde edilecek olan $(\mathbf{X}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ en iyi çözüm kümesinin probleme ilişkin kısıtları sağlaması için 2. gerekli koşul mutlaka sağlanmalıdır.

NOT 1: Kısıtlanmış türevlerin kullanılması düşüncesi, $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ kısıt sisteminin sağlandığı tüm noktalarda, $f(\mathbf{X})$' in birinci kısmi türevinin kapalı formda ifadesini bulmaya dayanır.

Yeterli Koşullar:

1. $\nabla^2_{\mathbf{X}} L = H(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})$ olmak üzere $H(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ hesaplanır.

2. $\mathbf{z}' \nabla g_i(\mathbf{X}^*) = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ olacak biçimde bir $\mathbf{z}$ vektörü belirlenir.

i. $\mathbf{z}' H \mathbf{z} > 0$ ise, $\mathbf{X}^*$ minimum noktadır.

ii. $\mathbf{z}' H \mathbf{z} < 0$ ise, $\mathbf{X}^*$ maksimum noktadır.

NOT 2: Eşitlik (12.1) ile tanımlı optimizasyon probleminde $f(\mathbf{X})$ amaç fonksiyonu kar fonksiyonu olarak tanımlandığında, $\boldsymbol{\lambda}_i^*$, i. kaynağın (b_i), $i = 1,2,\ldots,m$, her birimine karşılık gelen parasal değer, gölge fiyat olarak yorumlanır. Buna göre, duyarlılık katsayısı (Lagrange çarpanı), sağ yan değerde olabilecek bir birimlik değişime karşılık amaç fonksiyonu nasıl etkilenir sorusuna verilecek yanıttır.

Örnek 12.1:

$$\begin{aligned} \min\ Z &= (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 2)^2 \\ X_1 + X_2 &= 6 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı eşitlik kısıtlı optimizasyon probleminin en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 2)^2 - \lambda(X_1 + X_2 - 6)$$

Gerekli Koşullar:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 2(X_1 - 2) - \lambda = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{\lambda}{2} + 2$$
$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2(X_2 - 2) - \lambda = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{\lambda}{2} + 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(X_1 + X_2 - 6) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{2} + 2 + \frac{\lambda}{2} + 2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^* = 2 \quad , \quad \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Yeterli Koşullar:

$$H(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \text{ olup, } H(\mathbf{X}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \text{ dır.}$$

$$\nabla g(\mathbf{X})=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \text{ olduğundan,}$$

$$\mathbf{z}'\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=0 \text{ olacak biçimde } \mathbf{z} \text{ vektörü}$$

$$\begin{bmatrix}z_1 & z_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=0 \Rightarrow z_1+z_2=0 \Rightarrow z_1=-z_2 \Rightarrow \mathbf{z}'=\begin{bmatrix}z_1 & -z_1\end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan,

$$\mathbf{z}'H\mathbf{z}=\begin{bmatrix}z_1 & -z_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ -z_1\end{bmatrix}=4z_1^2>0 \text{ olduğundan, } \mathbf{X}^*=\begin{bmatrix}X_1^*\\ X_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix} \text{ minimum noktadır.}$$

Örnek 12.2:

$$\begin{aligned}\max\ f(\mathbf{X})&=-2X_1^2-X_2^2-3X_3^2\\ X_1+2X_2+X_3&=1\\ 4X_1+3X_2+2X_3&=2\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı eşitlik kısıtlı optimizasyon probleminin en iyi çözüm değeri ne olur?

Çözüm:

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})=-2X_1^2-X_2^2-3X_3^2-\lambda_1(X_1+2X_2+X_3-1)-\lambda_2(4X_1+3X_2+2X_3-2)$$

Gerekli Koşullar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial X_1}&=-4X_1-\lambda_1-4\lambda_2=0\\ \frac{\partial L}{\partial X_2}&=-2X_2-2\lambda_1-3\lambda_2=0\\ \frac{\partial L}{\partial X_3}&=-6X_3-\lambda_1-2\lambda_2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}&=X_1+2X_2+X_3-1=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}&=4X_1+3X_2+2X_3-2=0\end{aligned}$$

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{27} & \frac{10}{27} & \frac{2}{27} \end{bmatrix}' \quad , \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \begin{bmatrix} -\frac{4}{27} & -\frac{4}{27} \end{bmatrix}'$$

Yeterli Koşullar:

$$H(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla g_1(\mathbf{X}^*) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \nabla g_2(\mathbf{X}^*) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{z}'\nabla g_1(\mathbf{X}^*) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0 \\ \\ \mathbf{z}'\nabla g_2(\mathbf{X}^*) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 4z_1 + 3z_2 + 2z_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} z_1 & 2z_1 & -5z_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}'H\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & 2z_1 & -5z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ 2z_1 \\ -5z_1 \end{bmatrix} = -162z_1^2 < 0$$

olduğundan, $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{27} & \frac{10}{27} & \frac{2}{27} \end{bmatrix}'$ maksimum noktadır.