BÖLÜM 3. OLASILIK ve OLASILIK DAĞILIMLARI

Rasgele Sonuçlu Deney: Sonuçlarının kümesi belli olan, ancak hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden söylenemeyen bir işleme **Rasgele Sonuçlu Deney** veya kısaca Deney denir.

Örnek Uzay: Bir deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine **Örnek Uzay** denir. Genellikle S harfi ile gösterilir.

Olay: Örnek uzayın bir altkümesine **Olay** denir.

Ayrık Olay: İki olay aynı anda meydana gelemiyorsa bu olaylara **ayrık olaylar** denir. Diğer bir ifadeyle kesişimleri boş küme olan olaylara **ayrık olaylar**denir.

Olasılık: Her olaya 0 ile 1 arasında bir gerçel sayı tahsis eden bir fonksiyondur. Olasılık fonksiyonunun belirtildiği örnek uzaya olasılık uzayı denir.

Örnek uzaydaki her noktaya (basit rasgele olay) ve her alt kümeye (bileşik rasgele olay) olasılık uzayında bir nokta (bir olasılık) karşılık gelir.

Örnek 3.1 Bir zar atıldığında çift sayı gelmesi olasılığı nedir?

Örnek uzay, yani tüm mümkün sonuçların kümesi,

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

dır.

$A = Çift\ say\text{ı}\ elde\ edilmesi$ olayı olsun. Buna göre,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

dir.

3.1 Olasılık Aksiyomları

1) Herhangi bir A olayı için $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(S) = 1$
3) A ile B ayrık olmayan iki olay ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4) A ile B ayrık iki olay ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(Yani, A ile B ayrık iki olay ise $A \cap B = \emptyset\ ve\ P(A \cap B) = 0$ dir.)
5) A olayı S örnek uzayının bir alt kümesi olsun. A olayının tümleyeninin olasılığı, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ dır.

3.2 Koşullu Olasılık

Bir olayın, başka bir olayın meydana gelmesi koşulu altında ortaya çıkması olasılığıdır. B olayı bilindiğinde A olayının ortaya çıkması olasılığı,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ile gösterilir ve B olayı verilmişken A olayının koşullu olasılığı olarak adlandırılır.

Eğer bir A olayının ortaya çıkması B olayının ortaya çıkmasına bağlı değilse A ve B olayları **bağımsız olaylar**dır ve

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

dir. Bu durumda,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

dır. Aynı şekilde,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

dir.

Örnek 3.2 A ve B iki olay olsun, öyleki;

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

olmak üzere aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

a) $P(A|B) =?$
b) $P(B|A) =?$
c) $P(A \cup B) =?$
a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$
b) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Örnek 3.3 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = p, P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ olduğu biliniyor. Buna göre,

a) A ve B ayrık iki olay ise p' yi bulunuz.
b) A ve B bağımsız iki olay ise p' yi bulunuz.

a) A ile B ayrık iki olay ise $A \cap B = \emptyset$ ve $P(A \cap B) = 0$ dir. Buna göre,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + p \Rightarrow p = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

b) A ile B bağımsız iki olay ise $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ dır. Buna göre;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + p - \frac{1}{4} \times p \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}p$$
$$\frac{3}{4}p = \frac{1}{12} \Rightarrow p = \frac{1}{9}$$

Örnek 3.4 Diş hekimliği fakültesinde okuyan öğrencilerin 0.30’ u biyoistatistikten, 0.20’ si biyokimyadan ve 0.15’ i hem biyoistatistik hem de biyokimyadan başarısız olmuştur. Öğrenciler içinden rasgele seçilen bir öğrenci,

a) Biyoistatistikten başarısız ise, biyokimyadan da başarısız olması olasılığı nedir?

b) Biyokimyadan başarısız ise, biyoistatistikten başarısız olma olasılığı nedir?

A: Biyoistatistikten başarısız olma olayı
B: Biyokimyadan başarısız olma olayı

$$P(A) = 0.30, P(B) = 0.20, P(A \cap B) = 0.15$$

a) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.30} = 0.50$

b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.20} = 0.75$

Örnek 3.5 Yapılan bir çalışmada hastaların 0.20’ si hem aspirin, hem de novaljin, 0.40’ ı sadece aspirin ve 0.30’ u da sadece novaljin kullanmaktadır. Rasgele seçilen bir hastanın aspirin kullandığı biliniyorsa, bu hastanın novaljin de kullanması olasılığı nedir?

A: Aspirin kullanma olayı
B: Novaljin kullanma olayı

$$P(A) = 0.40, P(B) = 0.30, P(A \cap B) = 0.20$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.20}{0.40} = 0.50$$

3.3. Permütasyon ve Kombinasyon

Permütasyon: n farklı elemandan r tanesinin bir sıralanması r’ li **permütasyon (sıra düzen)** olarak adlandırılır. ${}_nP_r$ ile gösterilir,

$$_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , \quad r < n$$
$$_{n}P_{n} = n! \quad , \quad r = n$$

Örnek 3.6 $A = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere 3' lü permütasyonları nelerdir?

a)

a	b	c	abc
		d	abd
	c	b	acb
		d	acd
	d	b	adb
		c	adc
b	a	c	bac
		d	bad
	c	a	bca
		d	bcd
	d	a	bda
		c	bdc
c	a	b	cab
		d	cbd
	b	a	cba
		d	cbd
	d	a	cda
		b	cdb
d	a	b	dab
		c	dac
	b	a	dba
		c	dbc
	c	a	dca
		b	dcb

b) a, b, c, d' nin 3' lü permütasyonlarının sayısı;

$$\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2} = 4.3.2 = 24$$

a) $_{4}P_{3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 4.3.2.1 = 24$

Örnek 3.7 Bir eczacı, bir diş hekimi, bir doktor ve bir biyolog yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?

$$_{4}P_{4} = 4!$$

Örnek 3.8 Bir eczacı, bir diş hekimi, bir doktor, bir hemşire ve bir hastabakıcıdan sadece ikisi yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?

$$_{5}P_{2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1} = 20$$

Kombinasyon: Düzenleme sırasına bakılmaksızın n tane nesneden r tanesinin seçimi n' nin r' li kombinasyonu olarak adlandırılır ve $_nC_r$ ile gösterilir,

$$_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Örnek 3.9 $A = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere 3' lü kombinasyonları nelerdir?

$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ olmak üzere 4' tür.

Kombinasyon formülü ile,

$$_4C_3 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

Örnek 3.10 5 doktor ve 7 eczacıdan 2' si doktor ve 3' ü eczacı olmak üzere 5 kişilik bir komisyon kaç farklı şekilde seçilebilir?

5 doktordan 2 tanesinin seçilmesi,

$$_5C_2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$$

7 eczacıdan 3 tanesinin seçilmesi,

$$_7C_3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$$

farklı durumda ortaya çıkabilir. O halde, söz konusu komisyon

$$10 \times 35 = 350$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

3.4 Rasgele Değişken

Rasgele Değişken: Bir örnek uzaydaki her rasgele olaya sayısal bir değer atayan bir fonksiyondur. Rasgele değişken $X, Y, Z, ...$ gibi büyük harflerle gösterilir.

Rasgele değişkenler kesikli rasgele değişken ve sürekli rasgele değişken olmak üzere ikiye ayrılır. Bir X rasgele değişkeninin olanaklı değerlerinin sayısı sonlu veya sayılabilir ise X' e **kesikli rasgele değişken** denir. Bir X rasgele değişkeninin olanaklı değerleri bir aralıktan ya da aralıklar koleksiyonundan oluşuyor ise X' e **sürekli rasgele değişken** denir.

X kesikli bir rasgele değişken olduğunda,

$$f_X(x) = P(X = x)$$

fonksiyonuna X rasgele değişkeninin **olasılık fonksiyonu** denir. Bir f fonksiyonun olasılık fonksiyonu olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekir.

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\sum_x f_X(x) = 1$

X sürekli bir rasgele değişken olduğunda,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa bu f fonksiyonuna X rasgele değişkeninin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir. Bir f fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekir.

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

3.5 Beklenen Değer ve Varyans

X bir rasgele değişken olmak üzere,

a) Kesikli X rasgele değişkeni için
$E(X) = \sum_x x f_X(x)$ değerine , ($\sum_x |x| f_X(x) < \infty$ olduğunda)

b) Sürekli X rasgele değişkeni için
$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ değerine, ($\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < \infty$ olduğunda)

X' in **beklenen değeri** denir.

$E(X-a)^k$ sayısına X' in a noktasına göre k. momenti denir. $E(X-a)^2$ sayısına X' in **varyansı** denir. $Var(X)$ ile gösterilir, $Var(X) \geq 0$ olmak üzere,

$$Var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

dir. Beklenen değer, dağılımın merkezi hakkında, varyans merkez etrafında yayılım hakkında bilgi verir.

Not: X bir rasgele değişken, a ve b birer rasgele değişken olmak üzere beklenen değer ve varyans için aşağıdaki özellikler yazılabilir.

a. $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$
b. $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$

Örnek 3.11 X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cx & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olmak üzere,
c. c değerini hesaplayınız.
d. $E(X)$ =?
e. $Var(X)$ =?
f. $P(X = 1)$ =?
g. $P(2 < X \leq 4)$ =?
h. $P(X \leq 3)$ =?

a) f fonksiyonunun olasılık fonksiyonu olması için,

$$\sum_x f_X(x) = 1$$

şartını sağlaması gerekir. Buna göre,

$\sum_{x=1}^{4} cx = 1$ olmalıdır. Yani,

$c.1 + c.2 + c.3 + c.4 = 1$
$10.c = 1$
$c = \frac{1}{10}$
olmalıdır. Buna göre,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

X	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

biçiminde yazılabilir.

b) $E(X) = \sum_{x=1}^{4} xf(x)$

$$= 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.4$$

$$= 0.1 + 0.4 + 0.9 + 1.6$$

$$= 3$$

c) $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{4} x^2 f(x)$$

$$= 1 \times 0.1 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.4$$

$$= 0.1 + 0.8 + 2.7 + 6.4$$

$$= 10$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= 10 - 3^2$$

$$= 1$$

d) $P(X = 1) = 0.1$

e) $P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$$= 0.3 + 0.4 = 0.7$$

f) $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.6$$

Örnek 3.12 X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cx & , \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olmak üzere,

a) c değerini hesaplayınız.

b) $E(X)$ =?

c) $Var(X)$ =?

d) $P(1 \leq X \leq 3)$ =?

e) $P(2 \leq X < 4)$ =?

f) $P(X \leq 3)$ =?

a) $\int_0^5 cxdx = 1$

$$c \int_0^5 xdx = 1$$

$$c \frac{x^2}{2} |_0^5 = 1$$

$$c = \frac{2}{25}$$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x & , \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$

$$E(X) = \int_0^5 x \frac{2}{25} xdx = \int_0^5 \frac{2}{25} x^2 dx$$

$$= \frac{2}{25} \int_0^5 x^2 dx = \frac{2}{25} \frac{x^3}{3} |_0^5 = \frac{10}{3}$$

c) $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$E(X^2) = \int_0^5 x^2 \frac{2}{25} xdx = \int_0^5 \frac{2}{25} x^3 dx = \frac{2}{25} \frac{x^4}{4} |_0^5 = \frac{25}{2}$$

$$Var(X) = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}$$

d) $P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \frac{2}{25} xdx = \frac{2}{25} \frac{x^2}{2} |_1^3 = \frac{2}{25}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{25}$

e) $P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 \frac{2}{25} xdx = \frac{2}{25} \frac{x^2}{2} |_2^4 = \frac{2}{25}\left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right) = \frac{12}{25}$

f) $P(X \leq 3) = \int_0^3 \frac{2}{25} xdx = \frac{2}{25} \frac{x^2}{2} |_0^3 = \frac{2}{25}\left(\frac{9}{2} - 0\right) = \frac{9}{25}$

Örnek 3.13 $Y = 3X - 5$, $E(X) = 4$, $Var(X) = 2$ olmak üzere Y rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansını bulunuz.

$$E(Y) = E(3X - 5)$$

$$= 3E(X) - 5$$

$$= 3.4 - 5 = 12 - 5 = 7$$

$$Var(Y) = Var(3X - 5)$$

$$= 9Var(X) = 9 \times 2 = 18$$

Örnek 3.14 Y = $X^2 + 3X$ ve $E(X) = 10$, $Var(X) = 6$ olmak üzere $E(Y)$ =?

E(Y) = E$(X^2 + 3X)$

$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$

$6 = E(X^2) - 100$

$E(X^2) = 106$

E$(X^2 + 3X) =$ $E(X^2) + 3E(X)$

$$= 106 + 3 \times 10 = 136$$