3.5. Bazı Kesikli Dağılımlar

3.5.1. Bernoulli Dağılımı

Bir deneyde başarı ve başarısızlık diye nitelendirilen iki sonuçla ilgilenildiğinde bu deneye (iki sonuçlu) Bernoulli deneyi ya da Bernoulli denemesi denir.

başarı olasılığı → p , $(0 < p < 1)$

başarısızlık olasılığı → $1 - p = q$

başarı-başarısız/ sağlam-bozuk/ olumlu-olumsuz/ ölü-canlı

Bernoulli dağılımının olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \;\; x = 0,1$$

şeklinde verilir.

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	p

Bernoulli dağılımın beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \sum_x x\,f(x) = 0(1-p) + 1p = p$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2\,f(x) = 0^2(1-p) + 1^2p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

3.5.2. Binom Dağılımı

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında (bağımsız olarak) n kez tekrarlanması ile oluşan deneye binom deneyi denir.

Binom deneyinin aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

- Deney süresince örneklemde denek sayısı ya da deneme sayısı değişmez olmalıdır.
- Denemeler birbirinden bağımsızdır.
- Her denemede iki olası sonuç vardır (istenen ve istenmeyen olay).
- Her denemede ilgilenilen olay olasılığı p değişmezdir. Dolayısıyla istenmeyen olay olasılığı $q = 1 - p$ de değişmezdir.

Binom dağılımı kesikli bir olasılık dağılımıdır. X rasgele değişkeni binom dağılımına sahip olduğunda $X \sim b(n, p)$ ile gösterilir.

Binom dağılımının olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1, \ldots, n$$

şeklinde verilir.

Binom dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir:

$\mu = E(X) = np$

$\sigma^2 = Var(X) = npq$

Çarpıklık katsayısı $ÇK = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$, basıklık katsayısı $BK = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$

Örnek 3.15. Bir kutuda bulunan 10 tabletten 5 tanesi aspirindir. Bu kutudan yerine koyarak 3 tablet çekildiğinde 2 tanesinin aspirin olması olasılığı nedir?

X: Çekilen tabletin aspirin olması

$X \sim b(n = 3, p = \frac{1}{2})$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.375$$

Örnek 3.16. İlaç üreten bir firma ürettiği ilaçları ambalajlayarak satışa sunmaktadır. Ambalajlanan ilaç paketlerinin %10'unun istenen standarda uymadığı bilinmektedir. Bu ambalajlanmış ilaç paketlerinden 5 tanesi yerine koyularak rasgele olarak seçildiğinde,

a) Hepsinin de ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
b) Sadece 2'sinin ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
c) En az 4'ünün ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
d) En fazla 2'sini ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
e) Ambalajı istenilen standarda uygun olması beklenen ilaç paketi sayısı nedir?

X: Ambalajı istenilen standarda uyan ilaç paketi sayısı

$X \sim b(n = 5, p = 0.90)$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1, \ldots, n$$

a) $P(X=5)=\binom{5}{5}(0.90)^5(0.10)^0=\frac{5!}{5!0!}(0.90)^5=0.59049$

b) $P(X=2)=\binom{5}{2}(0.90)^2(0.10)^3=\frac{5!}{2!3!}(0.90)^2(0.10)^3=0.0081$

c) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)$

$$=\binom{5}{4}(0.90)^4(0.10)^1+\binom{5}{5}(0.90)^5(0.10)^0=\frac{5!}{4!1!}(0.90)^4(0.10)^1+\frac{5!}{5!0!}(0.90)^5$$

$$=0.32805+0.59049=0.91854$$

d) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$=\binom{5}{0}(0.90)^0(0.10)^5+\binom{5}{1}(0.90)^1(0.10)^4+\binom{5}{2}(0.90)^2(0.10)^3$$

$$=0.00001+0.00045+0.0081=0.00856$$

e) $\mu=E(X)=np=5(0.90)=4.5$

Örnek 3.17. Belli bir ameliyatın başarılı sonuçlanması olasılığı %80'dir. Ameliyat edilen 10 hastadan,

a) 6' sının iyileşmesi olasılığı nedir?
b) En az 9' unun iyileşmesi olasılığı nedir?
c) En fazla 7' sinin iyileşmesi olasılığı nedir?
d) Ameliyatı başarılı sonuçlanacak hastaların beklenen sayısını ve varyansını hesaplayınız.

X: Ameliyat sonrası iyileşen hasta sayısı

$X\sim b(n=10, p=0.80)$

$$f(x)=P(X=x)=\binom{10}{x}(0.80)^x(0.20)^{n-x},\quad x=0,1,\ldots,10$$

a) $P(X=6)=\binom{10}{6}(0.80)^6(0.20)^{10-6}=\frac{10!}{6!(10-6)!}(0.80)^6(0.20)^4=0.088$

b) $P(X\geq 9)=P(X=9)+P(X=10)$

$$=\binom{10}{9}(0.80)^9(0.20)^{10-9}+\binom{10}{10}(0.80)^{10}(0.20)^{10-10}$$

$$=\frac{10!}{9!\,(10-9)!}(0.80)^9(0.20)^1+\frac{10!}{10!\,(10-10)!}(0.80)^{10}(0.20)^0$$

$$=0.2684+0.1073=0.3758$$

c) $P(X\leq 7)=1-P(X>7)=1-\big(P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\big)$

$P(X=8)=\binom{10}{8}(0.80)^8(0.20)^2=0.3019$

$P(X=9)+P(X=10)=0.3758$ daha önce bulunmuştu.

$$P(X\le 7)=1-\big(P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\big)$$
$$=1-(0.3019+0.3758)=0.3224$$

d) $\mu=E(X)=np=10(0.80)=8$

$\sigma^2=Var(X)=npq=10(0.80)(0.20)=1.6$

3.5.3. Poisson Dağılımı

Bu dağılım, belirli bir aralıkta gerçekleşme olasılığının çok küçük olduğu durumlarda kullanılır. Örneğin Ankara'da Beşevler kavşağında bir gün içerisinde meydana gelen trafik kazaları, belli bir yılda meydana gelen doğal afetler, az rastlanan hastalıklar gibi.

Denek sayısı olan *n* büyük iken p de çok küçük ise binom dağılımı poisson dağılımına yaklaşır. Genel olarak $np\le 5$ olduğu zaman binom dağılımı yerine poisson dağılımı kullanılabilir. Ayrıca *n*' nin 20 den büyük olması koşulu vardır.

X rasgele değişkeni Poisson dağılımına sahipse, bu değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x)=P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ \ x=0,1,2,\dots$$

λ gerçekleşen ortalama olay sayısı olup $\lambda=np$ dir.

Poisson dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$\mu=E(X)=\lambda$

$\sigma^2=Var(X)=\lambda$

Çarpıklık katsayısı $ÇK=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, basıklık katsayısı $BK=3+\frac{1}{\lambda}$

Örnek 3.18. Bir şehirde ender rastlanan bir hastalıktan, bir hafta içinde ortalama ölen kişi sayısı 4' dür. Belli bir hafta içinde bu hastalıktan,

a) Hiç kimsenin ölmemesi
b) En az 2 kişinin ölmesi
c) 3 kişinin ölmesi

olasılıklarını hesaplayınız.

X: $bir\ haftada\ bu\ hastalıktan$ $\ddot{o}lenlerin\ sayısı$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \ \ x = 0,1,2,\ldots, \lambda = 4$$

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 0.0183$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = 1 - \left(\frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!}\right) =$
$= 1 - (0.0183 + 0.0733) = 1 - 0.0916 = 0.9084$

c) $P(X = 3) = \frac{e^{-4}4^3}{3!} = 0.195$

Örnek 3.19. Acil servise saat 14^{00}-15^{00} arasında her 15 dakikada ortalama 3 ambulans gelmektedir. Saat 14^{00}-15^{00} arasında herhangi bir 15 dakika içinde acil servise,

a) Hiç araç gelmemesi
b) En az 1 araç gelmesi
c) 4 araç gelmesi
d) 5 araç gelmesi
e) En çok 2 araç gelmesi

olasılıklarını bulunuz.

X: $15\ dakikalık\ s\ddot{u}re\ içinde\ acil\ servise\ gelen\ araç\ sayısı$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \ \ x = 0,1,2,\ldots, \lambda = 3$$

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = 0.04979$
b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.04979 = 0.95021$

c) $P(X = 4) = \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0.16803$

d) $P(X = 5) = \frac{e^{-3}3^5}{5!} = 0.10082$

e) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0.04979 + 0.14936 + 0.22404 = 0.42319$$

Örnek 3.20. Bir ülkedeki her 100000 ölüm vakasında ortalama 3 tanesi gıda zehirlenmesinden ortaya çıkmaktadır. Belirli bir zaman dilimindeki 200000 ölüm vakasında gıda zehirlenmesinden dolayı,

a) Sıfır ölüm vakasına
b) 6 ölüm vakasına
c) 6,7 ya da 8 ölüm vakasına,

rastlama olasılıklarını hesaplayınız.

$n = 100000, \quad \lambda = np = 3$

$3 = 100000p \Rightarrow p = 0.00003$

$n = 200000, \quad \lambda = np = 200000(0.00003) = 6$

X: $gıda\ zehirlenmesinden\ ölen\ kişi\ sayı$sı

$$P(X = x) = \frac{e^{-6}6^x}{x!}, \ \ x = 0,1,2, \dots$$

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} = 0.0025$

b) $P(X = 6) = \frac{e^{-6}6^6}{6!} = 0.162$

c) $P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \frac{e^{-6}6^6}{6!} + \frac{e^{-6}6^7}{7!} + \frac{e^{-6}6^8}{8!}$

$$= 0.162 + 0.1388 + 0.1041 = 0.4049$$

3.5.4. Geometrik Dağılım

Arka arkaya n kez tekrarlanan bir Bernoulli deneyinde ilk istenen sonucun (başarı ya da başarısızlık) elde edilmesi için yapılan deney sayısı olan X' e geometrik rasgele değişken denir. Bu değişkenin dağılımı geometrik dağılım adını alır.

X rasgele değişkeni geometrik dağılıma sahipse, $X \sim Geo(p)$ biçiminde gösterilir.

X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1,2,3, \dots \quad 0 < p < 1$$

biçimindedir.

Geometrik dağılımın beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Örnek 3.21. Bir torbada 8 beyaz, 4 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor.

a) Beyaz topun ilk defa 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?
b) X rasgele değişkeni beyaz bir top çekmek için yapılan deney sayısı ise X rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı nedir?

X: İlk başarıya ulaşıncaya kadar yapılan deney sayısı

$$X \sim Geo(p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3})$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{3})^{x-1}, \;\; x = 1,2,3, \ldots$$

a) $P(X = 5) = \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{3})^{5-1} = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^4 = \frac{2}{243}$

b) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\left(2/3\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Örnek 3.22. Bir sınıfta sigara içen öğrenci olma olasılığı 0.40' dır. Devam çizelgesinde ismi belirlenen öğrenciye sigara içip içmediği soruluyor. 4' üncü sırada sorulan öğrencinin ilk sigara içen öğrenci olma olasılığı nedir?

X: İlk başarıya ulaşıncaya kadar yapılan deneme sayısı

$$X \sim Geo(p = 0.40)$$

$$f(x) = P(X = x) = 0.40(1 - 0.40)^{x-1}, \;\; x = 1,2,3, \ldots$$

$$P(X = 4) = 0.40(1 - 0.40)^{4-1} = 0.0864$$