MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ)
Hafta 5: Baz ve Boyut

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI, Doç Dr. İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 15: V bir reel vektör uzayı ve $\psi = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\} \subset V$ olsun.

1. $\psi = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ vektör cümlesi lineer bağımsız
2. $V = Span\{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\} = Span\{\psi\}$

   özelikleri sağlanıyor ise ψ vektör cümlesine V vektör uzayının bir **bazı** veya **tabanı** adı verilir. Bir uzayın baz vektörleri o uzayı **temsil eden** vektörlerin cümlesidir.

Örnek 30: $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında
$\psi = \{\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)\}$ vektör cümlesi bir bazdır.

1. $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$ olduğundan ψ vektör cümlesi lineer bağımsızdır.
2. $\forall \overrightarrow{\alpha} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $\overrightarrow{\alpha} = c_1 \overrightarrow{e_1} + c_2 \overrightarrow{e_2}$ olacak şekilde $c_1 = x, c_2 = y \in \mathbb{R}$ vardır. O halde $\mathbb{R}^2 = Span\{\psi\}$.
   ψ bazına $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayının **standart bazı** denir.
   Benzer şekilde kolayca gösterilebilir ki
   $\Psi = \{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (1,0,1), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\}$ vektör cümlesi de $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının **standart bazı** olur.

Örnek 31: $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında
$\psi = \left\{ \overrightarrow{f_1} = (1,0), \overrightarrow{f_2} = (0,1), \overrightarrow{f_3} = (3,-2) \right\}$ vektör cümlesi bir baz mıdır?
$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ için

$$c_1 \overrightarrow{f_1} + c_2 \overrightarrow{f_2} + c_3 \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{0}$$

ifadesinden

$$c_1(1,0) + c_2(0,1) + c_3(3,-2) = (0,0)$$

$$(c_1 + 3c_3, c_2 - 2c_3) = (0,0)$$

olacağından $c_1 + 3c_3 = 0$ ve $c_2 - 2c_3 = 0$ olur. Bu ise $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $c_1 = -3\lambda$, $c_2 = 2\lambda$ ve $c_3 = \lambda$ demektir. O halde bu vektörler lineer bağımlıdırlar. Dolayısıyla bir baz olamazlar.

Uyarı: Bir vektör uzayında $\overrightarrow{0}$ vektörünü içeren alan herhangi bir vektör cümlesi o uzayın bazı olamaz. Çünkü $\overrightarrow{0}$ vektörünü içeren her vektör cümlesi lineer bağımlıdır..

Örnek 32: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında $\phi = \left\{ \overrightarrow{f_1} = (-1,1,1), \overrightarrow{f_2} = (1,-1,1), \overrightarrow{f_3} = (1,1,-1) \right\}$ vektör cümlesi bir baz mıdır?

1. $$\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$$

   olduğundan ϕ vektör cümlesi lineer bağımsızdır.

2. $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında ϕ vektör cümlesi $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayını gerer. Çünkü; $\forall \overrightarrow{\alpha} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için $\overrightarrow{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} c_i \overrightarrow{e_i}$ olacak şekilde $c_1 = \dfrac{z+y}{2}, c_2 = \dfrac{x+z}{2}, c_3 = \dfrac{x+y}{2} \in \mathbb{R}$ vardır.

   O halde ϕ vektör cümlesi $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının bir bazıdır.

Teorem 8: V bir reel vektör uzayı ve $\psi = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ bu vektör uzayının bir bazı olsun. $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ vektörü ψ baz vektörlerinin lineer birleşimi olarak tek türlü yazılır.

Tanım 16: V bir reel vektör uzayı ve $\psi = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ bu vektör uzayının bir bazı olsun. $\forall \overrightarrow{\alpha} \in V$ vektörü için $\overrightarrow{\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \overrightarrow{e_i}$ olacak şekilde $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ sayılarına $\overrightarrow{\alpha}$ vektörünün bu **baza göre bileşenleri** denir ve bu baza göre vektör

$$\overrightarrow{\alpha}_{\psi} = (c_1, c_2, ..., c_k)$$

ile gösterilir.

Örnek 33: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayında $\phi = \left\{ \overrightarrow{f_1} = (-1,1,1), \overrightarrow{f_2} = (1,-1,1), \overrightarrow{f_3} = (1,1,-1) \right\}$ vektör cümlesi bir bazdır. Standart baza göre koordinatları baza göre $\overrightarrow{\alpha} = (-1,5,3)$ olan vektörün ϕ bazına göre koordinatlarını bulunuz.

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} c_1 \overrightarrow{f_1} + c_2 \overrightarrow{f_2} + c_3 \overrightarrow{f_3} &= \overrightarrow{\alpha} \\ c_1(-1,1,1) + c_2(1,-1,1) + c_3(1,1,-1) &= (-1,5,3) \\ (-c_1 + c_2 + c_3, c_1 - c_2 + c_3, c_1 + c_2 - c_3) &= (-1,5,3) \end{aligned}$$

olup $-c_1 + c_2 + c_3 = -1, c_1 - c_2 + c_3 = 5$ ve $c_1 + c_2 - c_3 = 3$ denklemlerinden $c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 2$ olur. Yani $\overrightarrow{\alpha_\phi} = (4,1,2)$ olur.

Tanım 17: V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı ve $\psi = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k\}$ bu vektör uzayının bir bazı olsun. Bazdaki vektör sayısına bu uzayın **boyutu** adı verilir. Bir V vektör uzayının boyutu $boyV$ ile gösterilir.

Örnek 33: $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında $\phi = \{\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, ..., 0), \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \overrightarrow{e_n} = (0, 0, 0, ..., 1)\}$ vektör cümlesine uzayın standart bazı adı verilir. Dolayısıyla bu uzayın boyutu $boy\mathbb{R}^n = n$ olur.

Uyarı: Bir vektör uzayının bazındaki vektör sayısı uzayın boyutunu geçemez.

Örnek 34: $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayında
$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \right\}$ alt uzayı veriliyor.
Bu uzayın bir bazını ve boyutunu bulunuz.
$x_2 = \lambda, x_3 = \mu$ ve $x_4 = \zeta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $x_1 = \mu - \zeta - \lambda$ olur. Yani,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (\mu - \zeta - \lambda, \lambda, \mu, \zeta) \\ &= \lambda\,(-1, 1, 0, 0) + \zeta\,(-1, 0, 1, 0) + \mu\,(1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

olup
$\phi = \left\{ \overrightarrow{f_1} = (-1, 1, 0, 0), \overrightarrow{f_2} = (-1, 0, 1, 0), \overrightarrow{f_3} = (1, 0, 1, 0) \right\}$
cümlesi W alt uzayı için bir bazdır. Dolayısıyla $boyW = 3$ olur.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.