MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ)
Hafta 9: İç Çarpım Uzayları

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 26: V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde simetrik,bi-lineer ve pozitif tanımlı olan bir

$$f : V \times V \to \mathbb{R} \; ; \; (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \to f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

iç çarpımı tanımlanabiliyorsa V vektör uzayına bir **iç çarpım uzayı** adı verilir.

İç çarpım uzayında metrik özelliklerden söz edebiliriz. Bu özellikler uzunluk, açı ve alan, hacim ölçüleriyle ilgilidirler. Örnek olarak, üzerinde Öklid anlamındaki iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu standart Öklid uzayını ele alalım.

Teorem 14: $\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve
$\forall Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ ile $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \langle , \rangle & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (X, Y) & \to & \langle X, Y \rangle = \|X\| . \|Y\| \cos\theta \end{array}$$

dönüşümü bir iç çarpım fonksiyonudur.
Bu durumda standart Öklid iç çarpımına göre iki vektör arası açı

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| . \|Y\|}\right)$$

olur.

Tanım 27: V bir reel iç çarpım uzayı olsun. $X, Y \in V$ için $\langle X, Y \rangle = 0$ ise X ve Y vektörlerine **ortogonal** ya da **dik vektörler** denir.

Tanım 28: V bir reel iç çarpım uzayı olsun. $S = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ vektör cümlesi için $i \neq j$ olmak üzere $\langle X_i, X_j \rangle = 0$ ise S cümlesine **ortogonal vektör cümlesi** denir. Eğer bu cümledeki her vektör birim vektör ise yani $\|X_i\| = 1$ ise S cümlesine **ortonormal vektör cümlesi** denir

Teorem 15: V bir reel iç çarpım uzayı olsun. $\forall X, Y \in V$ için

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| . \|Y\|$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizlik literatürde **Schwarz Eşitsizliği** olarak bilinir.

Teorem 16: V bir reel iç çarpım uzayı olsun. $\forall X, Y \in V$ için

$$\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = 2\left(\|X\| + \|Y\|\right)^2$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitliğe **Paralelkenar kuralı** adı verilir.

Teorem 17: V bir reel iç çarpım uzayı olsun. $\forall X, Y \in V$ için

$$\|X+Y\|^2 - \|X-Y\|^2 = 4\langle X, Y\rangle$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitliğe **Polarizasyon Eşitliği** adı verilir.

Teorem 18: $\mathbb{R}^n$ standart Öklid uzayında $S = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ortonormal bir vektör cümlesi olmak üzere $\forall X \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle X, X_i \rangle|^2 \leq \|X\|^2$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizlik literatürde **Bessel Eşitsizliği** olarak bilinir.

Teorem 19: $X \neq \overrightarrow{0}$ olmak üzere $\forall X \in \mathbb{R}^n$ vektörü için

$$X_0 = \frac{1}{\|X\|}.X$$

olarak tanımlanan X_0 vektörü birim vektördür.
Bu biçimde tanımlanan X_0 vektörüne X vektörünün **normlanmışı** denir ve bu vektör X vektörü yönündeki birim vektördür.

Teorem 20: $\mathbb{R}^n$ $n-$boyutlu iç çarpım uzayında bir $S = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ortogonal vektör sistemi için

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2$$

dir.

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.