MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ)
Hafta 10: Gramm-Schmidt Ortonormalleştirme Metodu

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ, Prof.Dr.Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Tanım 29: $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere W, V vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Eğer V vektör uzayının bir α vektörü W vektör uzayının her β vektörüne dik ise β vektörüne W **vektör uzayına diktir** denir. Bu koşulu saylayan β vektörlerinin

$$W^{\perp} = \{\alpha \in V : \forall \beta \in W \text{ için } \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}$$

şeklinde tanımlı cümlesine de W vektör uzayının **ortogonal kompleman uzayı** adı verilir.

Teorem 21: $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere W, V vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. $W^{\perp}$ cümlesi de V vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 30: $n-$boyutlu bir reel vektör uzayı V olmak üzere W_1 ve W_2, V vektör uzayının iki alt vektör uzayı olsun.

1. $W_1 + W_2 = V$
2. $W_1 \cap W_2 = \varnothing$

koşulları sağlanıyorsa V vektör uzayına W_1 ve W_2alt vektör uzaylarının **direkt toplam uzayı** denir ve $W_1 \oplus W_2 = V$ ile gösterilir..

Teorem 22: : $n-$boyutlu bir reel vektör uzayı V olmak üzere W_1 ve W_2, V vektör uzayının sonlu boyutlu iki alt vektör uzayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} boy\left(W_1+W_2\right) &= boyW_1+boyW_2-boy\left(W_1\cap W_2\right), \\ boy\left(W_1\oplus W_2\right) &= boyW_1+boyW_2 \end{aligned}$$

dir.

Teorem 23: : $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere W, V vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda

1. $W\oplus W^{\perp}=V$
2. $\left(W^{\perp}\right)^{\perp}=W$

dir.

Teorem 24: : $n-$boyutlu bir reel vektör uzayı V olmak üzere W, V vektör uzayının sonlu boyutlu bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda $m \leq n$ olmak üzere W vektör uzayının bir

$$S_W = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$$

bazı V vektör uzayının bir

$$S_V = \{f_1, f_2, ..., f_m, \mathbf{f}_{m+1}, \mathbf{f}_{m+2}, ..., \mathbf{f}_n\}$$

bazına tamamlanabilir. Burada $\{\mathbf{f}_{m+1}, \mathbf{f}_{m+2}, ..., \mathbf{f}_n\}$ vektörlerine **baza tamamlayan vektörler** denir.

Örnek 46: $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayının
$W_1 = Span\{\alpha_1 = (2,-1,3), \alpha_2 = (1,1,-2)\}$ ve
$W_2 = Span\{\beta_1 = (-1,1,4), \beta_2 = (3,2,-1)\}$ alt uzayları
veriliyor. Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

1. $W_1 \cap W_2$ alt uzayının bir vektörünü bulunuz.
2. W_1 alt uzayının $\psi = \{\alpha_1 = (2,-1,3), \alpha_2 = (1,1,-2)\}$ bazını $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayının bir bazına tamamlayınız.
3. W_2 alt uzayının ortogonal kompleman uzayını bulunuz.
4. $boy\,(W_1 + W_2)$ değerini hesaplayınız.

Örnek 47: $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayının
$W_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\right\}$ ve
$W_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\right\}$ alt uzayları veriliyor.
Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

1. $W_1 \cap W_2$ alt uzayını bulunuz.
2. W_1 alt uzayının $\psi = \{\alpha_1 = (2, -1, 3), \alpha_2 = (1, 1, -2)\}$ bazını $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayının bir bazına tamamlayınız.
3. W_2 alt uzayının ortogonal kompleman uzayını bulunuz.
4. $boy\,(W_1 + W_2)$ değerini hesaplayınız.

Örnek 48: $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayının
$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ ve
$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$ alt uzayları veriliyor.
Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

1. $W_1 \cap W_2$ alt uzayını bulunuz.
2. W_1 alt uzayının bir bazını bulunuz ve bu bazı $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayının bir bazına tamamlayınız.
3. W_1 ve W_2 alt uzaylarının ortogonal kompleman uzaylarını bulunuz.
4. $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$ olur mu? Yorumlayınız.

Vektörel Çarpım ve Karma Çarpım:$\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayında

$$\begin{aligned} \wedge \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \\ (X, Y) \longrightarrow \quad & X \wedge Y = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \\ = \quad & \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $X \wedge Y$ vektörüne X ile Y vektörlerinin **vektörel çarpımı** veya **dış çarpımı** denir. Aslında geometrik olarak $X \wedge Y$ vektörü hem X hem de Y vektörlerine dik olan bir vektördür. Yani;

$$\langle X \wedge Y, X \rangle = 0 \text{ ve } \langle X \wedge Y, Y \rangle = 0$$

dir.

$\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayında $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ve $Z = (z_1, z_2, z_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \det \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (X, Y, Z) \quad &\longrightarrow \quad \det(X, Y, Z) = \langle X, Y \wedge Z \rangle = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona vektörlerin **karma çarpımı** adı verilir.. Ayrıca determinant fonksiyonunun özelikleri yardımıyla kolayca gösterilebilir ki;

$$\langle X, Y \wedge Z \rangle = \langle Y, Z \wedge X \rangle = \langle Z, X \wedge Y \rangle$$

dir.

Teorem 25: $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayında
$\forall X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ve $Z = (z_1, z_2, z_3)$ için
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

1. $X \wedge Y = -Y \wedge X$ (Vektörel çarpım anti-simetriktir.)

2. $X \wedge Y = 0$ (Vektörel çarpım alternedir.)

3. $X \wedge (\lambda Y + \mu Z) = \lambda (X \wedge Y) + \mu (X \wedge Z)$
$(\lambda X + \mu Y) \wedge Z = \lambda (X \wedge Z) + \mu (Y \wedge Z)$

4. $(X \wedge Y) \wedge Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X$

5. $X \wedge (Y \wedge Z) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z$
$X \wedge (Y \wedge Z) + Y \wedge (Z \wedge X) + Z \wedge (X \wedge Y) \equiv 0$

ve

6. $\|X \wedge Y\| = \|X\| . \|Y\| \sin\theta$, θ iki vektör arası açıdır.
7. $X, Y \in \mathbb{R}^3$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı $S = \|X \wedge Y\|$ olur.
8. $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \right|$$

dir.
9. $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ vektörleri lineer bağımlıdır ancak ve ancak $V = 0$
10. $X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için

$$\begin{aligned} (X \wedge Y) \wedge (Z \wedge W) &= \det(X, Z, W)\, Y - \det(Y, Z, W)\, X, \\ (X \wedge Y) \wedge (Y \wedge Z) &= \det(X, Y, Z)\, Y \end{aligned}$$

dir.

Örnek 49: $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayında köşelerinin koordinatları
$A(-1, 2, 1)$, $B(3, -2, 4$ ve $C(4, 3, -5$
olan üçgenin alanını hesaplayınız.

Teorem 26: V, $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı ve $W = span\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\}$ olsun. Bir $\alpha \in V$ vektörünün W alt uzayı üzerine **dik izdüşümü** olan vektör

$$İz_W \alpha = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \alpha, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle} \beta_j$$

dir.

Örnek 50: $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayında $W = Span\{\alpha_1 = (2, -1, 3), \alpha_2 = (1, 1, -2)\}$.alt uzayı veriliyor. α vektörünün $\beta = (3, -4, 2)$ vektörünün W alt uzayı üzerine ortogonal izdüşümü olan vektörü bulunuz.

Örnek 51: $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayında $\alpha = (1, -3, 2)$ vektörünün $x + y + z = 0$ düzlemi üzerine ortogonal izdüşümü olan vektörü bulunuz.

Özel olarak; bir $\alpha \in V$ vektörünün sıfırdan farklı bir β vektörü üzerine **dik izdüşümü** olan vektör

$$\dot{I}z_{\beta}\alpha = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}\beta$$

ve **dik izdüşüm vektörünün uzunluğu**

$$\|\dot{I}z_{\beta}\alpha\| = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\beta\|}$$

olur.

Ödev: $\mathbb{R}^2$ standart Öklid uzayında $\alpha = (-2, 1)$ vektörü veriliyor.

1. α vektörünün $\beta = (3, -4)$ vektörü üzerine ortogonal izdüşümü olan vektörü bulunuz.
2. α vektörünün $\beta = (3, -4)$ vektörü üzerine izdüşümü olan vektörün uzunluğunu bulunuz.
3. α vektörünün $3x - 4y + 12 = 0$ vektörü üzerine ortogonal izdüşümü olan vektörü bulunuz.
4. α vektörünün $3x - 4y + 12 = 0$ vektörü üzerine izdüşümü olan vektörün uzunluğunu bulunuz.

Teorem 27: V, $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı ve $S_x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ cümlesi V vektör uzayının **lineer bağımsız** bir vektör cümlesi olsun. Bu cümle

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_n &= x_n - \sum_{i=1}^{n-1} - \frac{\langle y_i, x_r \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i \quad ,2 \leq n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

formülleri ile $S_y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ ortogonal vektör cümlesine ve daha sonra da

$$e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}, \ 1 \leq n \in \mathbb{N}$$

formülleri ile $S_e = \{e_1, e_2, ..., e_r\}$ ortonormal vektör sistemine dönüştürülür.

Teorem 28: V bir iç çarpım uzayı ve $\{e_1, e_2, \ldots.., e_n\}$ de V nin bir ortonormal bazı olsun.

1. $\forall x \in V$ için
$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$
2. V de herhangi iki vektör $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ve $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ ise
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

dir.

Örnek 52: $\mathbb{R}^3$ standart Öklid uzayında $S_x = \{x_1 = (0,1,0), x_2 = (0,2,1), x_1 = (3,2,0)\}$ vektör sistemini ortonormal bir vektör sistemine dönüştürünüz.
Çözüm: *I.Adım* (Ortogonalleștirme):

$$y_1 = x_1 = (0,1,0)$$

$$y_2 = -\frac{\langle y_1, x_2\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 + x_2 = (0,0,1)$$

$$y_3 = -\frac{\langle y_1, x_3\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 - \frac{\langle y_2, x_3\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} y_2 + x_3 y_3 = (3,0,0)$$

II.Adım (Ortonormalleștirme):
y_1, y_2 ortonormal vektörler olduğundan yalnızca y_3 vektörünü birim hale getirmemiz yeterli olacaktır. Yani; $e_3 = \dfrac{y_3}{\|y_3\|} = (1,0,0)$ ve
$e_1 = y_1, \quad e_2 = y_2$ olduğundan

$$S_e = \{e_1 = (0,1,0), e_2 = (0,0,1), e_3 = (1,0,0)\}$$

Kaynaklar

1) A. Sabuncuoğlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
5) H. H. Hacısalihoğlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.