

MAT 114 LİNEER CEBİR (İSTATİSTİK, ASTRONOMİ ve UZAY BİLİMLERİ) Hafta 11: Linear Dönüşümler Uzayı

Prof.Dr.F.Nejat EKMEKÇİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI,
Doç.Dr.İsmail GÖK

2017-2018 BAHAR

Lineer Dönüşümler Uzayı

n ve m boyutlu iki reel vektör uzayı V ve W olmak üzere , V vektör uzayının bir tabanı

$$\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

ve W vektör uzayının bir bazı

$$\psi = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$$

şeklinde verilsin. $A : V \rightarrow W$ lineer dönüşümü altında $1 \leq i \leq n$ için $A(\alpha_i)$ vektörlerini W vektör uzayının ψ bazına göre ifade edelim. Bu ifade

$$A(\alpha_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \beta_j$$

ya da daha açık yazılışla

$$A(\alpha_1) = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \dots + a_{m1}\beta_m$$

$$A(\alpha_2) = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \dots + a_{m2}\beta_m$$

$$A(\alpha_n) = a_{1n}\beta_1 + a_{2n}\beta_2 + \dots + a_{mn}\beta_m$$

olur ki bu da $A : V \rightarrow W$ lineer dönüşümü için

$$\mathcal{A}_{\phi, \psi} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris belirtir.

Tanım 31: n ve m boyutlu iki reel vektör uzayı V ve W olmak üzere, V vektör uzayının bir tabanı

$$\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

ve W vektör uzayının bir bazı

$$\psi = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$$

şeklinde verilsin. $\mathcal{A}_{\phi, \psi} \in \mathbb{R}_n^m$ matrisine **A lineer dönüşümünün ϕ ve ψ bazlarına göre matrisi** denir.

Örnek 53: $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y) = (x - y, x + y, -x)$ lineer dönüşümü verilsin. \mathbb{R}^2 ve \mathbb{R}^3 reel vektör uzaylarının

$$\phi = \{\alpha_1 = (2, 1), \alpha_2 = (-1, 2)\}$$

ve

$$\psi = \{\beta_1 = (0, 1, 1), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (1, 1, 0)\}$$

bazlarına göre A lineer dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{A}_{\phi, \psi}$ matrisini bulunuz.

Örnek 54: $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A(x, y, z) = (x - y + z, x + y - 2z)$
lineer dönüşümü verilsin. \mathbb{R}^3 ve \mathbb{R}^2 reel vektör uzaylarının

$$\phi = \{\beta_1 = (0, 1, 1), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (1, 1, 0)\}$$

ve

$$\psi = \{\alpha_1 = (2, 1), \alpha_2 = (-1, 2)\}$$

bazlarına göre A lineer dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{A}_{\phi, \psi}$ matrisini bulunuz.

Örnek 55: $L : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $L(p(x)) = x.p'(x)$ lineer dönüşümü verilsin. \mathbb{P}^2 ikinci dereceden polinom fonksiyonların uzayının

$$\phi = \{1, 1 - x, 1 + x^2\}$$

ve

$$\psi = \{1, x + 1, x^2\}$$

bazlarına göre L lineer dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{L}_{\phi, \psi}$ matrisini bulunuz.

Teorem 29: n ve m boyutlu iki reel vektör uzayı V ve W olmak üzere, V vektör uzayının bir tabanı $\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve W vektör uzayının bir bazı $\psi = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ şeklinde verilsin. $A : V \rightarrow W$ ve $B : V \rightarrow W$ lineer dönüşümleri için

$$(A + B)_{\phi, \psi} = A_{\phi, \psi} + B_{\phi, \psi}$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda A)_{\phi, \psi} = \lambda \cdot A_{\phi, \psi}$$

dır.

Teorem 30: $A : V \rightarrow W$ lineer dönüşümünün V vektör uzayının $\phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve W vektör uzayının $\psi = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ bazlarına göre matrisi $A_{\phi, \psi}$ ise $\forall \alpha \in V$ için

$$A_{\phi, \psi} \cdot [\alpha]_{\phi} = [A(\alpha)]_{\psi}$$

dir.

Örnek 55: \mathbb{R}^3 ve \mathbb{R}^2 reel vektör uzaylarının iki bazı, sırasıyla,

$$\phi = \{\alpha_1 = (0, 1, 1), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (1, 1, 0)\}$$

ve

$$\psi = \{\beta_1 = (2, 1), \beta_2 = (-1, 2)\}$$

olsun. $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A matrisine ϕ ve ψ tabanlarına göre karşılık gelen lineer dönüşümü bulunuz.

Kaynaklar

- 1) A. Sabuncuođlu, Mühendislik ve İstatistik Bölümleri İçin Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.
- 2) B. Kolman and D.R. Hill, Uygulamalı Lineer Cebir, Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2011.
- 3) F. Çallıalp, Lineer Cebir Problemleri, Birsen Yayınevi, 2008.
- 4) H. Anton, Elementary Linear Algebra, Drexel University, 1984, ISBN:0-471-09890-6.
- 5) H. H. Hacısalihođlu, Temel ve Genel Matematik Cilt II, 1985.