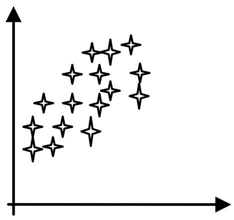
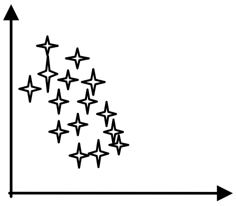
6.6. Korelasyon Analizi

ρ : Kitle korelasyon katsayısı

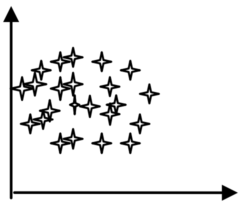
İki ya da daha çok değişken arasındaki ilişkiyi gösterir. Korelasyon çözümlemesinin amacı, değişkenler arasındaki ilişkinin derecesini ve yönünü belirlemektir.



İki değişkenin her ikisi de aynı yönde değişim gösterirse aralarındaki ilişki pozitiftir ve korelasyon katsayısının işareti (+) olur.



Değişkenlerden biri artarken diğeri azalıyorsa ilişki negatiftir ve korelasyon katsayısı (-) işaretlidir.



Değişkenler arasında negatif yada pozitif yönde birlikte bir değişim yoksa bu durumda korelasyon katsayısı sıfırdır.

$\rho = 1$ ise iki değişken arasında pozitif yönde tam bir ilişki vardır.

$\rho = -1$ ise iki değişken arasında negatif yönde tam bir ilişki vardır.

$R^2 \longrightarrow$ Belirtme katsayısı

$R^2 = \frac{RKT}{YOAKT}$

$r = \pm\sqrt{R^2} \longrightarrow$ örneklem korelasyon katsayısı (Pearson'ın korelasyon katsayısı ($\hat{\rho} = r$))

$-1 \leq \rho \leq 1, \qquad -1 \leq r \leq 1$

r'nin işareti regresyon katsayısı b_1'in işareti ile aynıdır.

$b_1 > 0 \quad \rightarrow \quad r_1 > 0$

$b_1 < 0 \quad \rightarrow \quad r_1 < 0$

$\sum(y-\hat{y}) = 0$ ise $r = 1$ ya da $r = -1$ olur.(ideal uyum)(Gerçek değer ile tahmin arasında fark yoktur.)

Eğer regresyon doğrusu $\bar{y}$ ile çakışan yatay doğru ise yani eğim sıfır olduğunda

$$\sum(y-\hat{y})^2 = \sum(y-\bar{y})^2$$

Dolayısıyla $b_0 = \bar{y}$ olur. Buradan $r = 0$'dır.

$\rho = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{var(x)var(y)}} \quad ; \quad Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$

Örneklem için,

$$r = \frac{XYOAÇT}{\sqrt{XOAKT\ YOAKT}} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)\left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right)}}$$

6.7.1. Korelasyon Katsayısına İlişkin Hipotez Testi

Korelasyon katsayısının önemliliğini test ederken örneklem dağılımının bilinmesi gerekir. Örneklem korelasyon katsayısının (r) dağılımı, örneklem hacmi (n) ve kitle korelasyon katsayısına (ρ) bağlıdır. Örneklem korelasyon katsayısı r'nin dağılımı ρ'nun büyük değerleri ve örneklem hacminin küçük değerleri için normal dağılımdan farklıdır.(ρ küçük olduğunda dağılım normaldir.) $\rho = 0$ olan bir kitleden çekilen rasgele örneklemin korelasyon katsayısının dağılımı $r \sim N(0, \sigma^2)$'dir. Ancak $\rho \neq 0$ olduğunda bu durum söz konusu değildir.

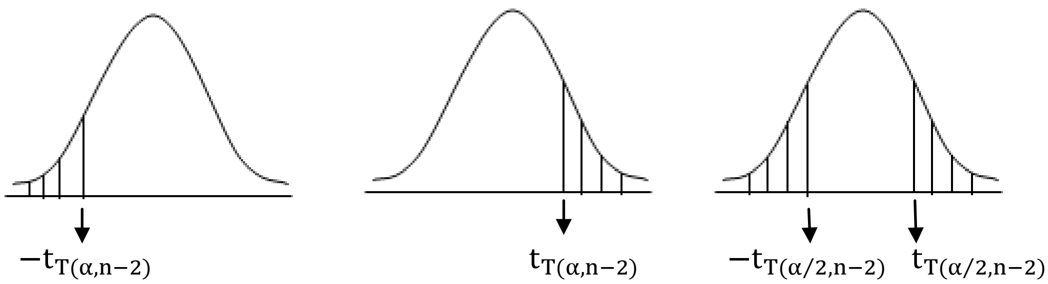
$\rho = 0$ ve $\rho \neq 0$ olmasına göre iki test yapılacaktır.

6.7.1.1. $\rho = 0$'ın Testi

1. $H_0: \rho = 0$ ($H_0: \beta_1 = 0$ hipotezinin testine eşdeğer test)
$H_1: \rho < 0,\ \rho > 0,\ \rho \neq 0$

2. $t_H = \frac{r-\rho}{S_r}$, $S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$

3. $H_1: \rho < 0$ $H_1: \rho > 0$ $H_1: \rho \neq 0$



$t_H < -t_{T(\alpha,n-2)}$ ise H_0 red $t_H > t_{T(\alpha,n-2)}$ ise H_0 red $t_H < -t_{T(\alpha/2,n-2)}$ yada
$t_H > t_{T(\alpha/2,n-2)}$ ise H_0 red

6.7.1.2. $\rho \neq 0$'ın Testi

1. $H_0: \rho = \rho_0$
$H_1: \rho < \rho_0,\ \rho > \rho_0,\ \rho \neq \rho_0$

2. Fisher'in Z dönüşümü

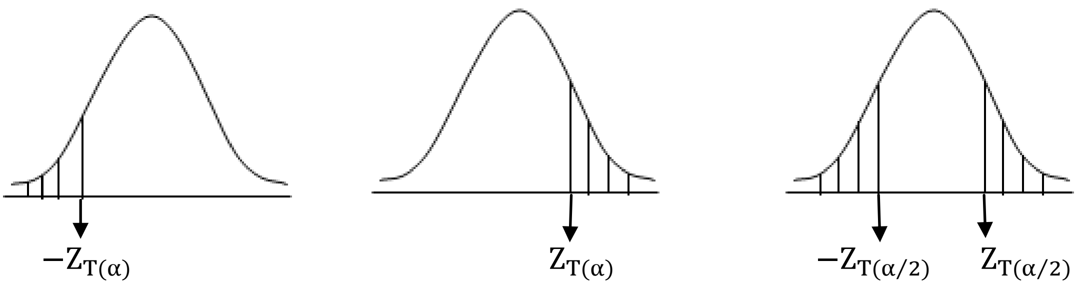
$Z_r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$, $Z_r \sim N(\mu_r, \sigma_r^2)$

$\mu_r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$, $\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{n-3}}$

Test istatistiği

$Z_H = \frac{Z_r - \mu_r}{\sigma_r}$

3. $H_1: \rho < \rho_0$ $H_1: \rho > \rho_0$ $H_1: \rho \neq \rho_0$



$Z_H < -Z_{T(\alpha)} \rightarrow H_0$ red edilir $Z_H > Z_{T(\alpha)} \rightarrow H_0$ red edilir $Z_H < -Z_{T(\alpha/2)}$ yada $Z_H > Z_{T(\alpha/2)} \rightarrow H_0$ red edilir

Korelasyon katsayısı ρ_0 değerinden farklıdır, biçiminde yorum yapılır.

6.7.2. Kitle Korelasyon Katsayısının Güven Aralığı

ρ kitle korelasyon katsayısının güven aralığını bulabilmek için önce μ_r için aralık bulunur sonra ρ'ya dönüştürülür.

$$P(Z_r - Z_{T(\alpha/2)}\sigma_r \leq \mu_r \leq Z_r + Z_{T(\alpha/2)}\sigma_r) = 1 - \alpha$$

μ_r yerine yazılırsa;

$$P\left(Z_r - Z_{T(\alpha/2)}\sigma_r \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \leq Z_r + Z_{T(\alpha/2)}\sigma_r\right) = 1 - \alpha$$

olur.

μ_r için aralık bulunduktan sonra ρ için aralık bulunur.

Örnek 6.6. Örnek 6.4 deki verileri kullanarak

a) Yaş ve ağırlık arasındaki ilginin miktarını bulunuz.
b) Önem kontrolünü $\rho = 0.85$ durumu için yapınız.
c) Kitle korelasyon katsayısı için %95'lik güven sınırlarını belirleyiniz.

Çözüm:

$\text{YOAKT} = 33.378$, $\text{XOAKT} = 115.750$, $\text{XYOAÇT} = 60.825$ olarak bulunmuştu.

a) $r = \frac{\text{XYOAÇT}}{\sqrt{(\text{XOAKT})(\text{YOAKT})}} = \frac{60.825}{\sqrt{(115.750)(33.378)}} = 0.98$

b) $H_0: \rho = 0.85$
$H_1: \rho \neq 0.85$

$$Z_H = \frac{Z_r - \mu_r}{\sigma_r}$$

$$Z_r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.98}{1-0.98}\right) = 2.298$$

$$\mu_r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.85}{1-0.85}\right) = 1.256\ , \qquad \sigma_r = \sqrt{\frac{1}{n-3}} = \sqrt{\frac{1}{13}} = 0.277$$

$$Z_H = \frac{2.298-1.256}{0.277} = 3.76$$

$$Z_{T(0.025)} = 1.96$$

$Z_H = 3.76 > Z_T = 1.96$ olduğundan H_0 red edilir.

Örneklem $\rho = 0.85$ olan kitleden alınmamıştır.

c) $P(Z_r - Z_{T(\alpha/2)}\sigma_r \leq \mu_r \leq Z_r + Z_{T(\alpha/2)}\sigma_r) = 1-\alpha$

$Z_r = 2.298\ ,\quad \sigma_r = 0.277,\quad Z_{T(0.025)} = 1.96$

$\mu_r: (\ Z_r \mp Z_{T(0.025)}\sigma_r)$

$\big(2.298 \mp (1.96)(0.277)\big)$

$\mu_r: [1.755; 2.841]$

Buradan; $(0.94 \leq \rho \leq 1)$ olarak bulunur.

Örnek 6.7. :Ciğerlerinden rahatsız olan insanlardan 10 tanesi rasgele seçilmiş ve sigara içtikleri yıl sayısı ve ciğer rahatsızlığının derecesine ilişkin bilgileri aşağıda verilmiştir.

Sigara içilen yıl:	25 36 22 15 48 39 42 31 28 33
Rahatsızlık derecesi:	55 60 50 30 75 70 70 55 30 35

a) Bağımlı ve bağımsız değişkeni belirleyerek sigara içmek ve ciğerlerinden rahatsız olma arasındaki ilişkiyi ifade eden regresyon denklemini bulunuz. 19 yıl sigara içen bir kimsenin rahatsızlığının derecesini tahmin ediniz.

b) $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde regresyon katsayılarının önem kontrolünü yapınız.

c) β_0 ve β_1 için %95 güven düzeyinde güven aralıklarını oluşturunuz.

d) Sigara içmek ile ciğerlerinden rahatsız olma arasındaki ilgi miktarını bularak, bu iki değişken arasındaki ilgi miktarının %75 olduğu hipotezini $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test ediniz.

e) Önem kontrolünü $\rho = 0$ durumu için yapınız.

f) Kitle korelasyon katsayısının %95'lik güven sınırlarını belirleyiniz.

g) Bağımsız değişkenin bağımlı değişkendeki değişimin yüzde kaçını açıkladığını ifade ederek yorumlayınız.

$$\sum x_j = 319 \quad , \sum x_j^2 = 11053 \quad , \bar{x} = 31.9$$

$$\sum y_j = 530 \quad , \sum y_j^2 = 30600 \quad , \bar{y} = 53$$

$$\sum x_j y_j = 18055$$

a) x: sigara içilen yıl (bağımsız)
y: rahatsızlık derecesi (bağımlı)

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

$$b_1 = \frac{XYOAÇT}{XOAKT} = \frac{\sum x_j y_j - \frac{\sum x_j \sum y_j}{n}}{\sum x_j^2 - \frac{(\sum x_j)^2}{n}} = \frac{18055 - \frac{(319)(530)}{10}}{11053 - \frac{(319)^2}{10}} = \frac{1148}{876.9} = 1.309$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 53 - 1.309(31.9) = 11.243$$

$$\hat{y} = 11.243 + 1.309x$$

$$\hat{y} = 11.243 + 1.309(19) = 36.114$$

b) **1)** $H_0: \beta_0 = 0$
$H_1: \beta_0 \neq 0$

2) $t_H = \frac{b_0 - \beta_{0.0}}{S_{b_0}} = \frac{b_0}{S_{b_0}}$

$$S_{b_0} = \sqrt{\text{RAKO}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\text{XOAKT}}\right]}$$

$$\text{XOAKT} = \sum x_j^2 - \frac{\left(\sum x_j\right)^2}{n} = 876.9$$

$$\text{YOAKT} = \sum y_j^2 - \frac{\left(\sum y_j\right)^2}{n} = 30600 - \frac{(530)^2}{10} = 2510$$

$$\text{XYOAÇT} = \sum x_j y_j - \frac{\sum x_j \sum y_j}{n} = 1148$$

$$\text{RKT} = b_1 \text{XYOAÇT} = 1.309 \times 1148 = 1502.732$$

$$\text{RAKT} = \text{YOAKT} - \text{RKT} = 2510 - 1502.732 = 1007.268$$

$$\text{RAKO} = \frac{1007.268}{8} = 125.909$$

$$S_{b_0} = \sqrt{\text{RAKO}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\text{XOAKT}}\right]}$$

$$= \sqrt{125.909\left(\frac{1}{10} + \frac{(31.9)^2}{876.9}\right)} = \sqrt{158.704} = 12.598$$

$$t_H = \frac{b_0}{S_{b_0}} = \frac{11.243}{12.598} = 0.892$$

$$t_T(0.025\,, \text{sd} = 8) = 2.306$$

3) $t_H < t_T$ olduğundan H_0 red edilemez. Yani, β_0 katsayısı önemli değildir.

1. $H_0: \beta_1 = 0$
$H_1: \beta_1 \neq 0$

2. $t_H = \frac{b_1}{S_{b_1}}$

$$S_{b_1} = \sqrt{\frac{\text{RAKO}}{\text{XOAKT}}} = \sqrt{\frac{125.909}{876.9}} = 0.144$$

$$t_H = \frac{b_1}{S_{b_1}} = \frac{1.309}{0.144} = 9.09$$

3. $t_T(0.025\,, sd = n - 2 = 8) = 2.306$

$t_H > t_T$ olduğundan H_0 red edilir. Regresyon katsayısı önemlidir. Eğim önemli olduğu için regresyon doğrusunun anlamlı olduğu söylenebilir.

F testi ile,

1) $H_0: \beta_1 = 0$
$H_1: \beta_1 \neq 0$

2) Varyans Analizi Tablosu

DK	Sd	KT	KO	Test
Regresyon	1	1502.732	1502.732	$F_H = \frac{1502.732}{125.909} = 11.935$
Regresyondan ayrılış	n-2=8	1007.268	125.909	
Toplam	n-1=9	2510		

3) $F_T(0.05\,, sd1 = 1, sd2 = n - 2 = 8) = 5.32$

$F_H > F_T$ olduğundan H_0 red edilir. Yani, regresyon doğrusu önemlidir.

c) β_1 için;

$$P\left(b_1 - t_T S_{b_1} \leq \beta_1 \leq b_1 + t_T S_{b_1}\right) = 1 - \alpha$$

$$\beta_1 \epsilon (1.309 - 2.306(0.144); 1.309 + 2.306(0.144))$$

$$\beta_1 \epsilon [0.9769; 1.6411]$$

β_0 için;

$$P\left(b_0 - t_T S_{b_0} \leq \beta_0 \leq b_0 + t_T S_{b_0}\right) = 1 - \alpha$$

$$\beta_0 \epsilon (11.243 - 2.306(12.598); (11.243 + 2.306(12.598))$$

$$\beta_0 \epsilon [-17.808; 40.294]$$

d) $H_0: \rho = 0.75$
$H_1: \rho \neq 0.75$

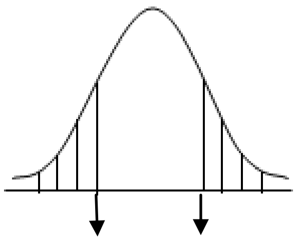
$$\text{YOAKT} = \sum y_j^2 - \frac{\left(\sum y_j\right)^2}{n} = 30600 - \frac{(530)^2}{10} = 2510$$

$$r = \frac{\text{XYOAÇT}}{\sqrt{\text{XOAKT}}\sqrt{\text{YOAKT}}} = \frac{1148}{\sqrt{(876.9)(2510)}} = 0.774$$

$$Z_H = \frac{Z_r - \mu_r}{\sigma_r} = \frac{1.030 - 0.973}{0.378} = 0.151$$

$$Z_r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.774}{1-0.774}\right) = 1.030$$

$$\mu_r = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.75}{1-0.75}\right) = 0.973 \quad , \quad \sigma_r = \sqrt{\frac{1}{n-3}} = \sqrt{\frac{1}{7}} = 0.378$$



$-Z_{T(0.025)} = -1.96$ $Z_{T(0.025)} = 1.96$

$Z_H < Z_T$ olduğundan H_0 red edilemez. Buradan ilgi miktarının 0.75 olduğu söylenebilir.

e) $H_0: \rho = 0$
$H_1: \rho \neq 0$

$$t_H = \frac{r-\rho}{S_r} \quad , \quad S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$

$$S_r = \sqrt{\frac{1-(0.774)^2}{10-2}} = 0.05012 \quad , \quad t_H = \frac{0.774}{0.05012} = 15.443$$

$$t_{T\left(\frac{\alpha}{2}=0.025, n-2=8\right)} = 2.306$$

$t_H > t_T$ olduğunda H_0 red edilir.

Örneklemin geldiği kitlenin korelasyon katsayısı sıfırdan farklıdır.

f) $P(Z_r - Z_{T(\alpha/2)}\sigma_r \leq \mu_r \leq Z_r + Z_{T(\alpha/2)}\sigma_r) = 1 - \alpha$

μ_r: $1.030 \pm (1.96)(0.378)$

μ_r: $(0.289; 1.771)$

Buradan;

$(0.28 \leq \rho \leq 0.95)$

bulunur.

g) $R^2 = \frac{RKT}{YOAKT} = \frac{b_1 XYOAÇT}{YOAKT} = \frac{(1.309)(1148)}{2510} \cong 0.60$

Bağımsız değişken bağımlı değişkenin %60'ını açıklamaktadır. Bu yeterince yüksek değildir. Bağımlı değişkeni daha iyi açıklayabilmek için başka bağımsız değişkenlere ihtiyaç duyulmaktadır.