Tek Değişkenli Sürekli Dağılımlar-II

1 Gamma Dağılımı

α ve β sıfırdan büyük iki parametre olmak üzere gamma fonksiyonu, $\Gamma(\alpha)$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha} = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx.$$

Her iki tarafın $\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}$ bölünmesi ile Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$1 = \frac{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx.$$

ve genel gösterimi

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

şeklindedir. X rasgele değişkeni yukarıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise $X \sim \text{Gamma}(\alpha,\beta)$ ile gösterilir. X rasgele değişkeninin n. momenti,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \int_0^{\infty} x^n f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_0^{\infty} x^{\alpha+n-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+n)\beta^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)\beta^{\alpha+n}} x^{\alpha+n-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+n)\beta^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)\beta^{n}}{\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Dağılımın birinci ve ikinici momentini bulmadan önce Γ fonksiyonunun bir kaç özelliğini inceleyelim

1.
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -x^{\alpha-1e^{-x}}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$$
$$= (\alpha-1)\int_0^\infty x^{(\alpha-1)-1}e^{-x}dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

2.
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

3. Γ fonksiyonunun 1 ve 2 numaralı özelliklerini kullanarak
$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1.1, \Gamma(3) = 2.1, \Gamma(4) = 3.2.1, ..., \Gamma(n) = (n-1)!$$

n. momenti kullanarak birinci momenti, ikinci momenti ve varyansı,
$$\mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\beta}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)(\alpha)\Gamma(\alpha)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\beta^2,$$
$$Var(X) = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$$
şeklinde bulunur. Gamma dağılımının moment çıkaran fonksiyonu,
$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}e^{tx}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{\beta}-t)}x^{\alpha-1}dx$$
$y = x\left(\frac{1}{\beta}-t\right)$ dönüşümünün uygulanması ile
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty e^{-y}\left(y\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)\right)^{\alpha-1}\frac{\beta}{1-\beta t}dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1}\frac{\beta}{1-\beta t}dy$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha}dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha}\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}dy$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha}\Gamma(\alpha) = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha}$$
şeklinde bulunur.

Örnek 1. $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ ve biribirinden bağımsız olmak üzere $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ rasgele değişkeninin dağılımını bulunuz.

Üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu $M_{X_i}(t) = \mathbb{E}(e^{tX_i}) = \frac{1}{1-\theta t}, i = 1, 2, 3, ..., n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) &= \mathbb{E}\left(e^{t(x_1+x_2+...+x_n)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tx_1}e^{tx_2}...e^{tx_n}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tx_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{tx_2}\right)...\mathbb{E}\left(e^{tx_n}\right) \\ &= (1-\theta t)^{-1}(1-\theta t)^{-1}...(1-\theta t)^{-1} \\ &= (1-\theta t)^{-n} \sim Gamma(\alpha = n, \beta = \theta) \end{aligned}$$

Yukarıdan da görülebileceği gibi n tane üstel dağılıma sahip rasgele değişkenin toplamı $Gamma(\alpha = n, \beta = \theta)$ dağılımına sahiptir. Aynı şekilde eğer $X \sim Gamma(\alpha = 1, \beta)$ ise $X \sim \text{Exp}(\beta)$ dır.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

olmak üzere α gördüğümüz yere 1 koyarsak

$$\frac{1}{\Gamma(1)}\beta^1 x^{1-1} e^{-\frac{x}{\beta}} = \beta e^{-\frac{x}{\beta}},$$

elde ederiz bununda Üstel dağılım olduğu açıktır.

Örnek 2. $X_i \sim Gamma(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ ve birbirinden bağımsız olmak üzere, $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ rasgele değişkenin dağılımını bulunuz.

$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ olmak üzere X'in moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t) = (1-\beta t)^{-1}$ dir. Y'nin moment çıkaran fonksiyonunu kullanarak dağılımının bulunması aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} M_Y(t) = \mathbb{E}\left(e^{tY}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{t(x_1+x_2+...+x_n)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tx_1}e^{tx_2}...e^{tx_n}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tx_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{tx_2}\right)...\mathbb{E}\left(e^{tx_n}\right) \\ &= (1-\beta t)^{-1}(1-\beta t)^{-1}...(1-\beta t)^{-1} \\ &= (1-\beta t)^{-n} \sim Gamma(\alpha = n\alpha, \beta = \beta) \end{aligned}$$

Yukarıda bulduğumuz moment çıkaran fonksiyonundan anlaşılabileceği gibi n tane $Gamma(\alpha, \beta)$ dağılımına sahip rasgele değişkenin dağılımı $Gamma(n\alpha, \beta)$ dır.

1.1 Matlab komutları

$Gamma(\alpha = 1, \beta = 5)$ dağılımından 100 tane sayı üretmek için Matlab da kullanmamız gereken komut gamrnd(1,5,1,100) veya gamrnd(1,5,1,100) dır.

gamrnd komutunun genel kullanımı:

gamrnd(α parametresi,β parametresi,satır sayısı,sütun sayısı)

şeklindedir.

Örnek 3. Gamma(3,5) dağılımından 1000 adet rasgele sayı üreten, ortalamasını ve varyansını hesaplayan Matlab komutlarını yazınız.

```
Y=gamrnd(3,5,1,100;
mean(Y)
ans= 15.2203
var(Y)
ans= 76.0359
```

Örnek 4. Farklı α ve β parametreleri için Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını çizen Matlab komutlarını yazınız.

```
x= 0:0.01:100;
y1= gampdf(x,3,5);
plot(x,y1)
hold on
y2= gampdf(x,5,8);
plot(x,y2)
y3= gampdf(x,4,10);
plot(x,y3)
```

Örnek 5. $X \sim Gamma(4, 10)$ olmak üzere aşağıdaki olasılıkları hesaplayan Matlab komutlarını yazınız.

1. $P(X < 6)$: gamcdf(6,4,10)
   ans= 0.0034
2. $P(5 < X < 6)$: gamcdf(6,4,10)- gamcdf(5,4,10)
   ans= 0.0016

3. $P(X > 7)$: 1-gamcdf(7,4,10)
   ans= 0.9982

2 Beta Dağılımı

α ve β sıfıranda büyük iki parametre olmak üzere *Beta* fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Beta(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

Beta ve Γ fonksiyonu arasındaki bağıntı

$$Beta(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

gibidir yani

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

her iki tarafıda $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$'ye bölerek Beta dağılımının dağılım fonksiyonunu elde ederiz,

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

$X \sim Beta(\alpha,\beta)$ olmak üzere X rasgele değişkeninin n. momenti,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \int_0^1 x^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{(n+\alpha)-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)} x^{(n+\alpha)-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

n. momenti kullanarak 1. moment,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

2.momenti,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\end{aligned}$$

ve varyansı,

$$\begin{aligned}Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2\alpha\beta-\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\end{aligned}$$

dır.

2.1 Matlab komutları

$Beta(\alpha=3,\beta=3)$ dağılımından 100 tane sayı üretmek için Matlab da kullanmamız gereken komut betarnd(3,3,1,100) veya betarnd(3,3,1,100) dır.

betarnd komutunun genel kullanımı:

betarnd(α parametresi,β parametresi,satır sayısı,sütun sayısı)

şeklindedir.

Örnek 6. Beta(3,5) dağılımından 1000 adet rasgele sayı üreten, ortalamasını ve varyansını hesaplayan Matlab komutlarını yazınız.

```
Y=betarnd(3,5,1,1000);
mean(Y)
ans= 0.3782
var(Y)
```

ans= 0.0264

Örnek 7. Farklı α ve β parametreleri için Beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını çizen Matlab komutlarını yazınız.

```
x= 0:0.001:1;
y1= betapdf(x,3,5);
plot(x,y1)
hold on
y2= betapdf(x,5,8);
plot(x,y2)
y3= betapdf(x,4,10);
plot(x,y3)
```

Örnek 8. $X \sim Beta(4,4)$ olmak üzere aşağıdaki olasılıkları hesaplayan Matlab komutlarını yazınız.

1. $P(X < 0.2)$: betacdf(0.2,4,4)
   ans= 0.0333
2. $P(0.1 < X < 0.9)$: betacdf(0.9,4,4)- betacdf(0.1,4,4)
   ans= 0.9945
3. $P(X > 0.4)$: 1-betacdf(0.4,4,10)
   ans= 0.1686

Ödev1. $Gamma(1,3), Gamma(2,3), Gamma(3,3)$ dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını tek bir grafikde çizen Matlab komutlarını yazınız.

Ödev2. $Gamma(1,3)$ ve $Exp(3)$ dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını tek bir grafikde çizen Matlab komutlarını yazınız.

Ödev3. $Beta(2,2), Beta(3,5)$ ve $Beta(4,6)$ dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını tek bir grafikde çizen Matlab komutlarını yazınız.

Ödev4. $Beta(1,1)$ ve Düzgün(0,1) dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını tek bir grafikde çizen Matlab komutlarını yazınız.