

Tek Değişkenli Sürekli Dağılımlar-III

1 Ki-Kare Dağılımı

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha},$$

$x > 0$, şeklinde tanımlanır. Burda $\alpha = \frac{p}{2}$ ve $\beta = 2$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}},$$

olur ve olasılık yoğunluk fonksiyonu bu şekilde olan X rasgele değişkenine serbestlik derecesi p olan ki-kare dağılımına sahiptir denir ve

$$X \sim \chi^2$$

ile gösterilir. Momentlerini bulmak için Gamma dağılımının momentlerinde $\alpha = \frac{p}{2}$ ve $\beta = 2$ değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^n) &= \int_0^\infty x^n f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+n-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+n)\beta^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)\beta^{\alpha+n}} x^{\alpha+n-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+n)\beta^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+n)\beta^n}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

n . momenti kullanarak birinci momenti, ikinci momenti ve varyansı,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\beta}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha + 1)(\alpha)\Gamma(\alpha)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha + 1)\beta^2,$$

$$\text{Var}(X) = \alpha(\alpha + 1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$$

şeklinde bulunur. Burdan $X \sim \chi^2$ için

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\text{Var}(X) = 2p$$

olduğu açıktır.

1.1 Matlab komutları

Örnek 1. $p = 6$ (serbestlik derecesi 6 olan) olan ki-kare dağılımından 1000 tane rasgele sayı üretmek için gerekli komut `chi2rnd(1,6,1000)` veya `chi2rnd(6,1,1000)` dir.

Komutun genel kullanımı:

`chi2rnd(serbestlik derecesi, satır sayısı, sütun sayısı)`

1000 tane rasgele sayı üreten, ortalamasını ve varyansını bulan komutlar:

```
Y=chi2rnd(6,1,1000);
mean(Y)
ans = 6.06
var(Y)
ans = 12.48
```

Örnek 2. Farklı serbestlik dereceleri için $X \sim \chi_p^2$ olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını çizen Matlab komutlarını yazınız.

1. Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

```
x=0:0.01:30;
y1=chi2pdf(x,6);
plot(x,y1);
hold on
y2=chi2pdf(x,8);
plot(x,y2);
```

```
y3=chi2pdf(x,10);  
plot(x,y3);  
y4=chi2pdf(x,4);  
plot(x,y4);
```

2. Dağılım fonksiyonu:

```
x=0:0.01:30;  
Y1=chi2cdf(x,6);  
plot(x,Y1);  
hold on  
Y2=chi2cdf(x,8);  
plot(x,Y2);  
Y3=chi2pdf(x,10);  
plot(x,Y3);  
Y4=chi2pdf(x,4);  
plot(x,Y4);
```

Örnek 3. $X \sim \chi_5^2$ olmak üzere $P(X < 6)$, $P(4 < X < 6)$ ve $P(X > 3)$ değerlerini hesaplayan matlab komutlarını yazınız.

- $P(X < 6) = \text{chi2cdf}(6,5)$
 $\text{ans} = 0.6938$
- $P(4 < X < 6) = \text{chi2cdf}(6,5) - \text{chi2cdf}(4,5)$
 $\text{ans} = 0.2432$
- $P(X > 3) = 1 - \text{chi2cdf}(3,5)$
 $\text{ans} = 0.7000$

Ödev. $X_1 \sim \text{Üstel}(2)$, $X_2 \sim \text{Gamma}(1,2)$ ve $X_3 \sim \chi_2^2$ olmak üzere bu rasgele değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafiklerini matlab da çiziniz.

2 Weibull Dağılımı

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} x^{\gamma-1} e^{-\frac{x^\gamma}{\beta}},$$

$x > 0, \gamma > 0$ ve $\beta > 0$ şeklinde ise X rasgele değişkenine Weibull dağılıma sahiptir denir ve $X \sim \text{Weibull}(\gamma, \beta)$ ile gösterilir.

2.1 Matlab komutları

Örnek 4. $X \sim \text{Weibull}(\gamma = 2, \beta = 4)$ olmak üzere 1000 tane rasgele sayı üreten, ortalamasını ve varyansını hesaplayan matlab kodlarını yazınız.

Komutun genel kullanımı:

`wblrnd(β parametresi, γ parametresi, satır sayısı, sütun sayısı)`

şeklindedir. 1000 tane sayı üreten ve ortalamasını, varyansını hesaplayan Matlab komutları:

```
Y = wblrnd(4,2,1,1000);  
mean(Y)  
ans = 3.4440  
var(Y)  
ans = 3.2655
```

Örnek 5. $X \sim \text{Weibull}(\gamma = 2, \beta = 4)$ olmak üzere X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonunu matlab da çiziniz.

1. Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

```
x=0:0.01:15;  
y1=wblpdf(x,4,2);  
plot(x,y)
```

2. Olasılık dağılım fonksiyonu

```
Y1 = wblcdf(x,4,2)  
plot(x,Y1)
```

3 F Dağılımı

$X_1 \sim \chi_p^2$ ve $X_2 \sim \chi_q^2$ olmak üzere

$$X_3 = \frac{X_1/p}{X_2/q}$$

şeklinde tanımlanan X_3 rasgele değişkeni F dağılıma sahiptir denir ve $X_3 \sim F(p,q)$ şeklinde gösterilir.

3.1 Matlab komutları

F-dağılımında rasgele sayı üretmek için kullanılan komut

`frnd(p-serbestlik derecesi, q-serbestlik derecesi, satır sayısı, sütun sayısı)`

şeklindedir.

Örnek 6. $X \sim F(5, 3)$ olmak üzere 1000 tane rasgele sayı üreten ve ortalamasını ve varyansını hesaplayan Matlab komutlarını yazınız.

```
Y = frnd(5,3,1,1000);  
mean(Y)  
ans = 2.3802  
var(Y)  
ans = 24.7468
```

Örnek 7. X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonunu çizen Matlab komutlarını yazınız.

1. Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

```
x=0:0.01:15;  
y1=fpdf(x,4,2);  
plot(x,y)
```

2. Olasılık dağılım fonksiyonu

```
Y1 = fcdf(x,4,2)  
plot(x,Y1)
```