

# Tek Değişkenli Sürekli Dağılımlar-IV

## 1 Normal Dağılım

$X$  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $\mu \in \mathbb{R}$  ve  $\sigma \in \mathbb{R}^2$  için

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

şeklinde olduğuna  $X$  rasgele değişkenine normal dağılıma sahiptir denir ve  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  şeklinde gösterilir. Normal dağılımın beklenen değeri  $E(X) = \mu$  ve varyansı  $\text{Var}(X) = \sigma^2$  dir

### 1.1 Matlab komutları

**Örnek 1.**  $X \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$  olan dağılımdan 1000 tane rasgele sayı üreten ve ortalamasını, varyansını hesaplayan matlab komutlarını yazınız.

Komutun genel kullanımı:

```
normrnd( $\mu, \sigma$ , satır sayısı, sütun sayısı)
```

şeklinde dir. 1000 tane rasgele sayı üreten, ortalamasını ve varyansını bulan komutlar:

```
Y=normrnd(4,sqrt(9),1,1000);  
mean(Y)  
ans = 3.7577  
var(Y)  
ans = 8.9377
```

**Örnek 2.** Farklı  $\mu$  ve  $\sigma^2$  değerleri için normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonlarını çizen Matlab komutlarını yazınız.

- $X \sim N(4, 50)$  olmak üzere

```
x = -30:0.01:30  
N = normpdf(x,4,sqrt(50));  
plot(x,N)  
hold on
```

- $X \sim N(4, 20)$  olmak üzere

```
N1 = normpdf(x,4,sqrt(20));  
plot(x,N1)
```

- $X \sim N(10, 20)$  olmak üzere

```
N2 = normpdf(x,10,sqrt(20));  
plot(x,N2)
```

**Örnek 2.**  $X \sim N(4, 16)$  olmak üzere aşağıdaki olasılıkları hesaplayan Matlab komutlarını yazınız.

- $P(X < 4)$ :  

```
normcdf(4,4,sqrt(16));  
ans = 0.5000
```

veya  

```
normspec([-inf,4],4,sqrt(16))
```
- $P(X > -2)$   

```
1 - normcdf(-2,4,sqrt(16));  
ans = 0.9332
```

veya  

```
normspec([-2,inf],4,sqrt(16))
```
- $P(4 < X < 12)$   

```
normcdf(12,4,sqrt(16)) - normcdf(4,4,sqrt(16))  
ans = 0.4772
```

veya  

```
normspec([4,12],4,sqrt(16))
```

**Örnek 3.**  $X_1 \sim N(-2, 4)$ ,  $X_2 \sim N(0, 4)$ ,  $X_3 \sim N(2, 4)$  ve  $X_4 \sim N(4, 4)$  olmak üzere bu rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonlarını aynı grafikte çizen Matlab komutlarını yazınız.

```
x = -15:0.01:15;
Y1 = normcdf(x, -2, sqrt(4));
plot(x, Y1)
hold on
Y2 = normcdf(x, 0, sqrt(4));
plot(x, Y2)
Y3 = normcdf(x, 2, sqrt(4));
plot(x, Y3);
Y4 = normcdf(x, 4, sqrt(4)); plot(x, Y4);
```

## 2 Standart Normal Dağılım

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ise  $Z = (X - \mu)/\sigma$  rasgele değişkeninin beklenen değeri 0 ve varyansı 1 dir.

$$\mathbb{E}((X - \mu)/\sigma) = \frac{1}{\sigma} \mathbb{E}(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} (\mathbb{E}(X) - \mu) = \frac{1}{\sigma} (\mu - \mu) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}((X - \mu)/\sigma) &= \mathbb{E}((X - \mu)^2 \frac{1}{\sigma^2}) - (\mathbb{E}((X - \mu)/\sigma))^2 \\ &= \mathbb{E}(\frac{1}{\sigma^2}(X^2 - 2\mu X + \mu^2)) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}(X^2) - 2\mu \mathbb{E}(X) + \mu^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2) = 1. \end{aligned}$$

veya

$$\text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \text{Var}\left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X) = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1.$$

Standart Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

şeklinde ve bu dağılıma sahip rasgele değişken  $X \sim N(0, 1)$  şeklinde gösterilir.

## 2.1 Matlab Komutları

**Örnek 4.**  $X \sim N(0, 1)$  olmak üzere dağılımdan 1000 tane rasgele sayı üreten ve ortalamasını, varyansını hesaplayan matlab komutlarını yazınız.

Komutun genel kullanımı:

```
randn(satır sayısı, sütun sayısı)
```

```
Y = randn(1,1000);  
mean(Y)  
ans = 0.0365  
var(Y)  
ans = 0.9969
```

**Örnek 5.** Standart normal dağılımın yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını çizen Matlab komutlarını yazınız.

- Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

```
x = -3.6:0.01:3.6  
y = normpdf(x,0,1)  
plot(x,y)
```

- Dağılım fonksiyonu:

```
x = -3.6:0.01:3.6  
y = normcdf(x,0,1)  
plot(x,y)
```

**Örnek 6.**  $X \sim N(0, 1)$  olmak üzere aşağıdaki olasılıkları hesaplayan Matlab komutlarını yazınız.

- $P(X > 0)$  :  
1 - normcdf(0,0,1)  
ans = 0.5  
veya  
normspec([0,inf],0,1)

- $P(-2 < X < 0)$  :  
`normcdf(0,0,1) - normcdf(-2,0,1)`  
`ans = 0.4772`  
veya  
`normspec([-2,0],0,1)`
- $P(X < -1.64)$  :  
`normcdf(-1.645,0,1)`  
`ans = 0.05`  
veya  
`normspec([-inf,1.645],0,1)`

**Örnek 6.**  $X \sim N(0, 1)$  olmak üzere aşağıdaki olasılık değerlerini sağlayan  $z$  değerlerini bulunuz.

- $P(Z < z) = 0.5$   
`norminv(0.5,0,1)`  
`ans = 0`
- $P(Z < z) = 0.05$   
`norminv(0.05,0,1)`  
`ans = 1.645`
- $P(Z > z) = 0.1$   
`norminv(0.9,0,1)`  
`ans = 1.28`