Zayıf Büyük Sayılar Kanunu ve Merkezi Limit Teoremi

1 Zayıf Büyük Sayılar Kanunu

Markov Eşitsizliği: X negative değerler almayan bir rasgele değişken olmak üzere Markov eşitsizliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

İspat

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(x) &= \int_0^\infty xf(x)dx \\
&= \int_0^a xf(x)dx + \int_a^\infty xf(x)dx \\
&\geqslant \int_a^\infty xf(x)dx \\
&\geqslant \int_a^\infty af(x)dx \\
&= a\int_a^\infty f(x)dx \\
&= aP(X \geqslant a).
\end{aligned}$$

Chebyshev Eşitsizliği: X rasgele değişkeni birinci ve ikinci momenti olan bir rasgele değişken olmak üzere Chebyshev Eşitsizliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P(|X-\mu| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}$$

İspat
Markov eşitsizliğinde X yerine $(X-\mu)^2$ konulursa

$$P((X-\mu)^2 > a^2) = P(|X-\mu| > a) \leqslant \frac{E((X-\mu)^2)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

sonucuna ulaşılır.

Zayıf Büyük Sayılar Kanunu $X_1, X_2, ..., X_n$ birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olmak üzere. $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ ve $Var(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, ..., n$ olsun.

Örneklem ortalaması

$$\overline{X_n} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{1}{n}$$

olmak üzere büyük sayılar kanunu

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \mu| < \epsilon) = 1.$$

şeklinde ifade edilir.

İspat
Zayıf Büyük Sayılar Kanunu ispat etmek için Chebyshev Eşitsizliğinde X yerine X'in örneklem ortalaması olan $\overline{X}_n$ konulması ve limitin alınması yeterlidir. Ayrıca örneklem ortalamasının beklenen değeri ve varyansına ihtiyaç vardır.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{X}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + X_2 + ... + X_n) \\
&= \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + ... + \mathbb{E}(X_n)\right) = \frac{1}{n}(n\mu) \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(\overline{X}_n) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{1}{n}\sigma^2.
\end{aligned}$$

Chebyshev eşitsizliğinde bulduğumuz değerleri yerine koyarak limitini alırsak

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \mu| \geqslant \epsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0$$

buradan

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \mu| \geqslant \epsilon) = 0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \mu| < \epsilon) = 1$$

olduğu açıktır.

Örnek 1. Bir zarın atılması deneyinde $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenleri zarın üzerindeki noktaların sayısını göstermek üzere $\overline{X_n} \to \mu$ olduğunu gösteren ve grafiğini çizen Matlab komutlarını yazınız.

Yukarıdaki örnek için gerekli algoritma:

- Kesikli Düzgün(0,6) dağılımından 1000 tane rasgele sayı üret,
- $\sum_{i=1}^{n} X_i$ değerini hesaplat,
- Ortalamayı$\overline{X_n}$ değerini hesaplat,
- Kitle ortalamasının ve örneklem ortalamasının grafiklerini çizdir.

Yukarıdaki algoritmanın matlabda uygulanması:

```
» r= unidrnd(6,1,1000);

» R= cumsum(r);

» Xbar= Y./(1:length(R));

»Tort= 3.5.*ones(1,length(R));

»plot(Tort);
```

»hold on

»plot(Xbar)

Örnek 2. Bir paranın arka arkaya 10000 kere atılması deneyeninin simülasyonunu yapan ve

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \mu| < \epsilon) = 1.$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \mu| > \epsilon) = 0.$$

olduğunu gösteren matlab komutlarını yazınız.

$X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkeni gelen yazıları göstermek üzere; (X(yazı) = 1 ve X(tura) = 0) olmak üzere $X \sim$ Binom(n=1,p=0.5) dir. Yukarıdaki örnek için gerekli algoritma:

- Binom(n=1,p=0.5)dağılımından 10000 tane rasgele sayı üret,
- $\sum_{i=1}^{n} X_i$ değerini hesaplat,
- Ortalamayı$\overline{X_n}$ değerini hesaplat,
- Kitle ortalamasının ve örneklem ortalamasının grafiklerini çizdir.

Yukarıdaki algoritmanın matlabda uygulanması:

» x= binornd(1,0.5,1,10000);

» X= cumsum(x);

» Xbar= Y./(1:length(x));

»Tort= 3.5.*ones(1,length(x));

»plot(Tort);

»hold on

»plot(Xbar)

2 Merkezi Limit Teoremi

$X_1, X_2, ..., X_n$ beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olan bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olmak üzere Merkezi Limit Teoremi

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)}} \to N(0,1).$$

veya

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \to N(0,1).$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3. 0 ile 1 arasında düzgün dağılımdan 100 tane rasgele sayı üretip

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \to N(0,1).$$

olduğunu histogram çizerek gösteren Matlab komutlarını yazınız.

```
» for i= 1:1000;

» x= rand(1,100);

» y(i)= sum(x)/100;

»z(i)= (y(i) - 0.5).*sqrt(100)./sqrt(1/12);

»end

»histfit(x)

»mean(x)

»var(x)
```

Örnek 4. $X \sim$ Poisson(4) dağılımından 100 adet rasgele sayı üretip

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \to N(0,1).$$

olduğunu histogram çizerek gösteren Matlab komutlarını yazınız.

```
» for i= 1:1000;
» x= poissrnd(4,1,100);
» y(i)= sum(x)/100;
»z(i)= (y(i) - 0.5).*sqrt(100)./sqrt(1/12);
»end
»histfit(x)
»mean(x)
»var(x)
```