Tahmin Edici Bulma Yöntemleri II

1 En Çok Olabilirlik Yöntemi

Olabilirlik Fonkisyonu: $X_1, X_2, ..., X_n$ birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olmak üzere, bu rasgele değişkenlerin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x;\theta)$ olmak üzere θ'nin olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta|X) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta).$$

şeklindedir.

En çok olabilirlik yönteminde amaç olabilirlik fonksiyonunu veya olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını maksimum yapan θ değerini bulmaktır.

$$\hat{\theta} = \text{argmax}_\theta L(\theta|X)$$

Örnek 1 $X_1, X_2, ..., X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

olan dağılımdan bir örneklem olmak üzere θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

$$L(\theta|\vec{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Yukarıdaki olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının alınması ile

$$\log L(\theta|\vec{X}) = n \log \theta + \theta \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

log *olabilirlik* elde edilir. Bu fonksiyonu max yapan değeri bulabilmek için θ parametresi üzerinden fonksiyonun türevini alıp θ için çözmemiz gerekmektedir.

$$\frac{\partial \log L(\theta|X)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \log x_i = -\frac{n}{\theta} \rightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$$

Son olarak $\hat{\theta}$ değerini fonksiyonun ikinci türevinde yerine koyarak fonksiyonun maksimum olup olmadığı test edilmelidir.

$$\frac{\partial^2 \log L(\theta|X)}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2}\Big|_{\theta=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}} < 0$$

olduğundan θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$$

dır.

Örnek 2 $X_1, X_2, ..., X_n \sim$ Üstel(θ) dağılımından alınmış bir örneklem olmak üzere θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, x > 0$ şeklindedir ve en çok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L(\theta|X) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta^n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\log L(\theta|X) = -n \log \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

θ üzerinden fonksiyonun türevlenmesi ile

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\theta|X)}{\partial \theta} &= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \rightarrow n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}_n. \end{aligned}$$

Örnek 3 $X_1, X_2, ..., X_n \sim$ Geometrik(p) dağılımından alınmış bir örneklem olmak üzere p parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Olasılık fonksiyonu $f(x;p) = p(1-p)^{x-1}, x = 1,2,3,...$ şeklindedir ve en çok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L(p|X) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1} = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}.$$

$$\log L(p|X) = n\log p + \sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\log 1-p$$

Fonksiyonun p'ye göre türevi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L(p|x)}{\partial p} &= \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}{1-p} = 0 \\
&\rightarrow n(1-p) - p\sum_{i=1}^{n}(x_i-1) = 0 \\
&\rightarrow n(1-p) - p\sum_{i=1}^{n}x_i + np = 0 \\
&\rightarrow n - np - p\sum_{i=1}^{n}x_i + np = 0 \\
&\rightarrow n - p\sum_{i=1}^{n}x_i = 0 \rightarrow \hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i} = \frac{1}{\overline{X}_n}.
\end{aligned}$$

İkinci türevinde $\hat{p}$'yı yerine koyarsak

$$\frac{\partial^2 L(p|x)}{\partial p^2} = -\frac{n}{p^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}{(1-p)^2}\Bigg|_{\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}_n}} < 0$$

olduğundan p'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}_n}$ dır

Örnek 4 $X_1, X_2, ..., X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3}$$

$0 \leqslant x \leqslant \theta$ olan dağılımından bir örneklem olmak üzere θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3x_i^2}{\theta^3} = \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

$$\log L(\theta|x) = n\log 3 - 3n\log\theta + \sum_{i=1}^{n} \log {x_i}^2$$

$$\frac{\partial \log L(\theta|x)}{\partial\theta} = \frac{-3n}{\theta} = 0 \rightarrow \theta = ?$$

x parametreye bağlı olduğu için türev alarak en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunamaz. Olasılık yoğunluk fonksiyonu indikator fonksiyonu ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3}\mathbb{1}_{0\leqslant x\leqslant\theta}$$

Bu şekilde yazılan olasılık yoğunluk fonksiyonunu kullanarak olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
L(\theta|x) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3x_i^2}{\theta^3}\mathbb{1}_{0\leqslant x_i\leqslant\theta} \\
&= \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \mathbb{1}_{0\leqslant x_1\leqslant\theta}\mathbb{1}_{0\leqslant x_2\leqslant\theta}\ldots\mathbb{1}_{0\leqslant x_n\leqslant\theta} \\
&= \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \mathbb{1}_{0\leqslant x_{(1)}\leqslant\theta}\mathbb{1}_{0\leqslant x_{(2)}\leqslant\theta}\ldots\mathbb{1}_{0\leqslant x_{(n)}\leqslant\theta} \\
&= \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \mathbb{1}_{0\leqslant x_{(n)}\leqslant\theta}
\end{aligned}$$

$x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$ sıra istatistikleri olmak üzere, $L(\theta|x)$ fonksiyonunu en büyük yapan değer θ'nın alabileceği en küçük değer olduğu için $\hat{\theta} = X_n$ dir.