Tahmin Edicilerde Aranan Özellikler I

1 Yansızlık

$X_1, X_2, ..., X_n$ parametresi θ olan kitleden bir örneklem ve $\hat{\theta}$ da θ'nın bir tahmin edicisi olmak üzere, eğer $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$ ise,$\hat{\theta}$'ya θ'nın yansız bir tahmin edicisidir denir.

Örnek 1. X_1, X_2, X_3 rasgele örneklemi

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0$$

dağılımından gelmek üzere, θ parametresi için

- $\hat{\theta}_1 = X_1$ tahmin edicisi yansız mıdır?

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_1) = \mathbb{E}(X_1) = \theta$$

olduğundan $\hat{\theta}_1$, θ için yansız bir tahmin edicidir.

- $\hat{\theta}_2 = \frac{X_1+X_2}{2}$ tahmin edicisi yansız mıdır?

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_2) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(\theta + \theta) = \theta$$

olduğundan $\hat{\theta}_2$, θ için yansız bir tahmin edicidir.

- $\hat{\theta}_3 = \frac{X_1+2X_2}{3}$ tahmin edicisi yansız mıdır?

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_3) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_1 + 2X_2) = \frac{3\theta}{3} = \theta$$

olduğundan $\hat{\theta}_3$, θ için yansız bir tahmin edicidir.

Örnek 2. $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele örneklemi

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmak üzere $\overline{X}_n$ örneklem ortalaması $\frac{\theta}{\theta+1}$ için yansız mıdır?

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}n\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx = \theta\int_0^1 x^{\theta}dx = \theta\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\Big|_0^1 \\ &= \frac{\theta}{\theta+1}\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{\theta}{\theta+1}$ olduğundan örneklem ortalaması $\frac{\theta}{\theta+1}$ için yansız bir tahmin edicidir.

2 Tutarlılık

$X_1, X_2, X_3..., X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta)$ olan kitleden bir örneklem olmak üzere,$\hat{\theta}_n$ de θ'nın bir tahmin edicisi olmak üzere, eğer

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$$

ise $\hat{\theta}_n$ tahmin edicisi θ için tutarlıdır.

Teorem: $\hat{\theta}_n$ tahmin edicilerin bir dizisi olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0,$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta)\right)^2 = 0,$$

koşulları sağlanıyorsa $\hat{\theta}_n$ tahmin edicisi θ için tutarlıdır.

Örnek 3. $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, x > \theta$$

olan dağılımdan bir örneklem olmak üzere $\hat{\theta} = X_{(1)}$ sıra istatistiği θ için tutarlı olduğunu gösteriniz.

$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$, ve $\lim_{n\to\infty}\Big(\mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta)\Big)^2 = 0$ göstermek için $X_{(1)}$ sıra istatistiğinin yoğunluk fonksiyonunu $f_{X_{(1)}}(x;\theta)$ bulmamız gerekmektedir.

- $f_{X_{(1)}}(x;\theta)$:

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)}} &= P(X_{(1)} \leqslant x) \\
&= P(\min\{X_1, X_2, ..., X_n \leqslant x\}) \\
&= 1 - P(\min\{X_1, X_2, ..., X_n > x\}) \\
&= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, ..., X_n > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x), ..., P(X_n > x) \\
&= 1 - [1 - F_{X_1}(x)][1 - F_{X_2}(x)]...[1 - F_{X_n}(x)] \\
&= 1 - [1 - F_X(x)]^n
\end{aligned}$$

Burdan $f_{X_{(1)}}(x)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_{X_{(1)}} = \frac{dF_{X_{(1)}}}{dx} = -n[1 - F_X(x)]^{n-1}(-f_X(x)) = n[1 - F_X(x)]f_X(x)$$

$f_{X_{(1)}}(x)$ bulabilmemiz için X rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonunu bulmamız gereklidir.

$$F_X(x) = \int_\theta^x e^{-(x-\theta)}dx = e^\theta \int_\theta^x e^{-x}dx = e^\theta(-e^{-x}\big|_\theta^x) = 1 - e^{\theta - x}$$

Yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarının yerine konulması ile

$$\begin{aligned}
f_{X_{(1)}}(x) &= n[1 - F_X(x)]f_X(x) \\
&= n[1 - (1 - e^{\theta - x})]^{n-1}e^{-(x-\theta)} \\
&= n[1 - 1 + e^{\theta - x}]^{n-1}e^{\theta - x} \\
&= n(e^{\theta - x})^{n-1}e^{\theta - x} \\
&= ne^{n\theta - nx}
\end{aligned}$$

- $\lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{E}(\hat{\theta}_n-\theta)\right)^2=0$ olduğunun gösterilmesi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(X_{(1)}) &= \int_\theta^\infty xne^{(n\theta-nx)}dx = ne^{n\theta}\int_\theta^\infty xe^{-nx}dx \\
&= ne^{n\theta}\left(-x\frac{e^{-nx}}{n}\bigg|_\infty^\theta + \int_\theta^\infty \frac{e^{-nx}n}{d}x\right) \\
&= ne^{n\theta}\left(-x\frac{e^{-nx}}{n}\bigg|_\infty^\theta + \frac{1}{n}\left(\frac{e^{-nx}}{n}\bigg|_\infty^\theta\right)\right) \\
&= ne^{n\theta}\left(0+\frac{\theta e^{-n\theta}}{n}+\frac{1}{n}(0+\frac{e^{-n\theta}}{n})\right) \\
&= ne^{n\theta}\left(\frac{1}{n}e^{-n\theta}(\theta+\frac{1}{n})\right) \\
&= \theta+\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{E}(X_{(1)}-\theta)\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\theta+\frac{1}{\theta}-\theta\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$$

- $\lim_{n\to\infty}Var(\theta_n)=0$ olduğunun gösterilmesi.

$$\begin{aligned}
Var(X_{(1)}) &= \mathbb{E}({X_{(1)}}^2)-(\mathbb{E}(X_{(1)}))^2 \\
&= \theta^2+\frac{2\theta}{n}+\frac{2}{n^2}-\left(\theta+\frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \theta^2+\frac{2\theta}{n}+\frac{2}{n^2}-\theta^2-\frac{2\theta}{n}-\frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}Var(X_{(1)})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})=0$ olduğundan $\hat{\theta}=X_{(1)}$ sıra istatistiği θ için tutarlıdır.