BELİRSİZ İNTEGRAL

Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x)dx$ olan Türevi $F(x)+c$, fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu yapılan işleme de belirsiz integral denir.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

şeklinde gösterilir.

Belirsiz İntegralin Özellikleri

1) $\int cf(x)dx = c.\int f(x)dx \quad (c \in R)$
2) $\int [f(x) + g(x) + h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + \int h(x)dx$

Temel İntegral Alma Kuralları

1) $\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + c \;\; (n \neq -1)$
2) $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$
3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$
4) $\int e^x dx = e^x + c$
5) $\int cosxdx = sinx + c$
6) $\int sinxdx = -cosx + c$
7) $\int sec^2 xdx = tanx + c$
8) $\int cosec^2 xdx = -cotx + c$
9) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$
10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctanx + c$
11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + c$

.

İntegral Alma Yöntemleri

1. Değişken Değiştirme Yöntemi :

$\int f(x)dx$ integrali $\int g(u).u'du$ şeklinde yazıldığında bilinen integral formüllerinde birine dönüşüyor ise bu yöntem kullanılır. Burada u; x'in bir fonksiyonudur.

Örnek:

$\int \frac{9}{(3x+10)^6}$ dx integralinin sonucu nedir

Çözüm:

U=3x+10 =>du =3dx => dx=$\frac{du}{3}$

$\frac{9}{(3x+10)^6}$ dx $= \frac{9}{u^6}\frac{du}{3} = 3u^{-6}$ du $= 3.\frac{u^{-6+1}}{-6+1} + c = \frac{-3}{5}u^{-5} + c$

olur. Son olarak u=3x+10 yerine yazılırsa $\int \frac{9}{(3x+10)^6}$ dx=$\frac{-3}{5}(3x+10)^{-5} + c$

elde edilir.

Örnek:

$\int (2x^2 - x + 7)^4.(4x - 1)$dx integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

u=$2x^2 - x + 7 \Longrightarrow du\ \ (4x - 1)dx$

$\int (2x^2 - x + 7)^4\ (4x - 1)dx = \int u^4\ du = \frac{u^5}{5} + c = \frac{1}{5}(2x^2 - x + 7)^5 + c$

bulunur.

Örnek:

$\int x.\sqrt{4 - x^2}$ dx integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

u=$4x^2$ ==> du -2xdx ==> x.dx= - $\frac{\text{du}}{2}$

$\int x.\sqrt{4-x^2}\ dx = -\int \sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{-1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}du = \frac{-1}{2}.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{-1}{3}.\text{u}^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}$ +c

Örnek:

$\int (e^x + 2)\, e^x$dx integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

u=$e^x + 2 \Longrightarrow$ du = $e^x\ dx$

$\int (e^x + 2)\, e^x \text{dx} = \int u.du = \frac{u^2}{2} + c\, \frac{(\text{e}^\text{x}+2)^2}{2} + c$

bulunur

Örnek:

$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+6}$ dx integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

u=$x^2 + 3x + 6 \Longrightarrow$ du=(2x+3)dx

$\int \frac{2\text{x}+3}{\text{x}^2+3\text{x}+6}\ \text{dx} = \int \frac{1}{\text{u}}\text{du} = \text{In}|\text{u}| + \text{c} = \text{In}(|\text{x}^2+3\text{x}+6|) + \text{c}$

olur.

Örnek:

$\text{e}^{5\text{x}+21}$ dx integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

u=5x+21$\Longrightarrow$ du =5dx$\Longrightarrow$ dx=$\frac{\text{du}}{5}$

$\int \text{e}^{5\text{x}+21}\, dx = \int e^u \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int e^u\, du = \frac{1}{4}.e^u + c = \frac{1}{4}\ \text{e}^{5\text{x}+21} + c$

bulunur.

Örnek:

$\int \sin(8x+3)dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

$u = 8x + 3 \Longrightarrow \ du = 8dx \Longrightarrow dx = \dfrac{du}{8}$

$\int \sin(8x+3)dx = \dfrac{1}{8}\int sinudu = -\dfrac{1}{8}cos(8x+3) + c$

elde edilir.

2. Kısmi İntegrasyon Yöntemi :

u ve v, x değişkeninin birer fonksiyonu olsunlar. $y = u.v$ ise . $y' = u'v + u.v'$ dir. Böylece

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u.\frac{dv}{dx}$$

olur. Buradan $dy = u.dv + v.du$ elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$\int dy = \int u.dv + \int v.du$ bulunur. Böylece

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

elde edilir. Eğer $\int v.du$ integralinin hesabı $\int u.dv$ integralinin hesabından daha kolay ise bu yöntem faydalı olur.

Örneğin,

a) $\int x.\sin x\ dx$ integrali verilsin. Bu durumda,

u=x ve dv = sinxdx olsun. Dolayısıyla,

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$\int x.\sin x\ dx$ = -x.cosx +$\int$ cosxdx

= -xcosx + sinx + c

bulunur.

<u>Örnek:</u>

$\int x.e^{x}\ dx$ integralinin sonucu nedir?

<u>Çözüm</u>:

$$\left.\begin{cases} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}\right\}$$ alınırsa;

$\int x.e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$ olur.

Örnek:

$\int \ln x \, dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\left.\begin{cases} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{cases}\right\} \text{alırsak;}$$

$$\int \ln x \, dx = x.\mathrm{In}x - \int x.\frac{1}{x} dx = x.\mathrm{In}x - \int dx \; x.\mathrm{In}x - x + c \text{ olur.}$$

Örnek:

$\int x^2 \cos x \; dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm :

u=x^2 dv=cosx dx

du=2xdx v=sin x

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int \sin x.2x dx = x^2.\sin x - 2 \int x \sin x \, dx \text{ elde edilir.}$$

BELİRLİ İNTEGRAL

(a,b) aralığında tanımlı ve sürekli f(x) foksiyonu için $\int f(x)dx = F(x) + c \ olmak$ $üzere$

$$\int_b^a f(x)dx \quad integraline \quad sınırlı\ integral\ denir.$$

$$\int_b^a f(x)dx = F(x) + c \Big|_a^b = \mathrm{F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)} \text{şeklinde} \quad \text{hesaplanır.}$$

$\int_b^a$ f(x)dx integralinde; a: integralin alt sınırı b: integralin üst sınırıdır.

Belirli İntegralin Özellikleri

İntegrallenebilen $f: [a, b] \to R$ fonksiyonu için

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Örnek:

$\int_1^2 (6x - 15)dx$ integ ralin sonucu kaçtır ?

Çözüm:

$\int (6x - 15)dx = 6.\frac{x^2}{2} - 15x + c$ olduğu için,

$$\int_1^2 (6x - 15)dx = 3x^2 - 15x \Big|_1^2 = (3.2^2 - 15.2)-(3.1^2-15.1) = -6$$

olur.

Örnek:

$\int_1^{e^3} \frac{1}{x} dx$ integralinin sonucu kaçtır ?

Çözüm:

$$\int \frac{1}{x} dx (In\, x + c \Rightarrow \int_1^{e^3} \frac{1}{x} dx = Inx \Big|_1^{e^3} = Ine^3 - \quad In1 = 3 - 0 = 3$$

Örnek:

$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2} dx$ integralinin sonucu kaçtır ?

Çözüm:

$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2} dx = \int 1 + \frac{1}{x^2} + c$ olduğu için;

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2} dx = x - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{1}\right) = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$ olur.