Tahmin Edicilerde Aranan Özellikler II

1 Etkinlik

$\hat{\theta}$ ve $\hat{\theta}_1$ herhangi bir θ parametresi için iki tahmin edici olmak üzere

$$Var(\hat{\theta}) < Var(\hat{\theta}_1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\hat{\theta}$ tahmin edicisi $\hat{\theta}_1$ tahmin edicisine göre daha etkindir denir.

Örnek 1. X_1, X_2, X_3 rasgele örneklemi

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x > 0$$

üstel dağılımından gelmektedir. θ parametresi için aşağıdaki 4 tahmin edici verilmiştir.

- $\hat{\theta}_1 = X_1$
- $\hat{\theta}_2 = \frac{X_1+X_2}{2}$
- $\hat{\theta}_3 = \frac{X_1+2X_2}{3}$
- $\hat{\theta}_4 = \overline{X}_n$

İlk 3 tahmin edicinin son tahmin ediciye göre etkinliğini test ediniz.

- $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_4$ karşılaştırılması:

$$Var(\hat{\theta}_1) = Var(X_1) = \theta^2$$

$$Var(\hat{\theta}_4) = Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i\right) = \frac{1}{9}Var(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{1}{9}3\theta^2 = \frac{1}{3}\theta^2$$

$Var(\hat{\theta}_1) > Var(\hat{\theta}_4)$ olduğundan $\hat{\theta}_4$ daha etkindir.

- Matlabda gösterilmesi:

  X1= exprnd(3,1,10000);

  X2= exprnd(3,1,10000);

  X3= exprnd(3,1,10000);

  Theta1= X1;

  var(Theta1)

  ans=9.3282

  Xn= (X1+X2+X3)/3;

  theta4= Xn

  var(theta4)

  ans= 3.0797

- $\hat{\theta}_2$ ve $\hat{\theta}_4$ karşılaştırılması:

$$Var(\hat{\theta}_2) = Var\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(Var(X_1) + Var(X_2)\right) = \frac{1}{4}(2\theta^2) = \frac{1}{2}\theta^2$$

$Var(\hat{\theta}_2) > Var(\hat{\theta}_4)$ olduğundan $\hat{\theta}_4$ daha etkindir.

- Matlabda gösterilmesi:

  theta2= (X1 + X2)./2;

  var(theta2)

  ans= 4.6342

  Xn= (X1+X2+X3)./3;

```
var(theta4)
ans= 3.0797
```

- $\hat{\theta}_3$ ve $\hat{\theta}_4$ karşılaştırılması:

$$Var(\hat{\theta}_3) = Var\left(\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right) = \frac{1}{9}Var\left(Var(X_1) + 4Var(X_2)\right) = \frac{5\theta^2}{9}$$

$Var(\hat{\theta}_3) > Var(\hat{\theta}_4)$ olduğundan $\hat{\theta}_4$ daha etkindir.

  - Matlabda gösterilmesi:

```
theta3= (X1 + 2.*X2)./3;
var(theta3)
ans= 5.1125
Xn= (X1+X2+X3)./3;
var(theta4)
ans= 3.0797
```

2 Yeterlilik

$X_1, X_2, X_3, ...X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan kitleden bir örneklem olmak üzere $\hat{\theta}_n$ tahmin edici θ hakkındaki bilgileri herhangi bir kayıp olmadan özetleyebiliyorsa $\hat{\theta}_n$ tahmin edicisine θ için yeterli bir tahmin edicidir denir.

Faktörizasyon Teoremi
$X_1, X_2, ..., X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) olan dağılımdan br örneklem olmak üzere, ortak olasılık yoğunluk fonkisyonu aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa $T(x)$'e yeterli bir tahmin edici denir.

$$f(x; \theta) = g(T(x); \theta)h(x)$$

Örnek 2.

$X_1, X_2, ..., X_n \sim Exp(\beta)$ dağılımından alınmış bir örneklem olmak üzere β parametresi için yeterli bir istatistik bulunuz.

$$f(x;\beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, x > 0$$

olmak üzere

$$f(\vec{x}\,,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta} e^{-x_i/\beta} = \frac{1}{\beta^n} e^{-\frac{1}{\beta}\sum x_i}$$

ortak olasılık fonksiyonu yukarıdaki gibi yazılabilir.$g(T(x);\beta) = \frac{1}{\beta^n} e^{-\frac{1}{\beta}\sum x_i}$ ve $h(x) = 1$ olduğundan $T(x) = \sum X_i$ β için yeterli bir istatistiktir.

Örnek 3 $X_1, X_2, ..., X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3}, 0 \leqslant x \leqslant \theta$$

olan dağılımdan bir örneklem olmak üzere θ parametresi için yeterli bir istatistik bulunuz.

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}\,,\beta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3x_i^2}{\theta^3} \mathbb{1}_{0 \leqslant x_i \leqslant \theta} \\
&= \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \mathbb{1}_{0 \leqslant x_1 \leqslant \theta} \mathbb{1}_{0 \leqslant x_2 \leqslant \theta} \dots \mathbb{1}_{0 \leqslant x_n \leqslant \theta} \\
&= \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \mathbb{1}_{0 \leqslant x_{(1)} \leqslant \theta} \mathbb{1}_{0 \leqslant x_{(2)} \leqslant \theta} \dots \mathbb{1}_{0 \leqslant x_{(n)} \leqslant \theta} \\
&= \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \mathbb{1}_{0 \leqslant x_{(n)} \leqslant \theta} \\
&= \frac{3^n}{\theta^{3n}} \mathbb{1}_{0 \leqslant x_{(n)} \leqslant \theta} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2
\end{aligned}$$

$g(T(x);\theta) = \frac{3^n}{\theta^{3n}} \mathbb{1}_{0 \leqslant x_{(n)} \leqslant \theta}$ ve $h(x) = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2$ olduğundan $T(x) = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, θ için yeterli bir istatistiktir.