Tek Değişkenli Sürekli Dağılımlar-I

1 Sürekli Düzgün Dağılım

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

şeklinde ise, X rasgele değişkenine (θ_1, θ_2) aralığında sürekli düzgün dağılıma sahiptir denir. Sürekli düzgün dağılıma sahip X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{\theta_1}^{x} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} dx = \left. \frac{x}{\theta_2 - \theta_1} \right|_{\theta_1}^{x} = \frac{x - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

şeklindedir ve genelikle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta_1, \\ \frac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 \leqslant x < \theta_2, \\ 1, & x \geqslant \theta_2. \end{cases}$$

X rasgele değişkenine ait olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarına ait grafikleri Şekil 1 de verilmiştir. Düzgün dağılım beklenen değeri (birinci momenti),

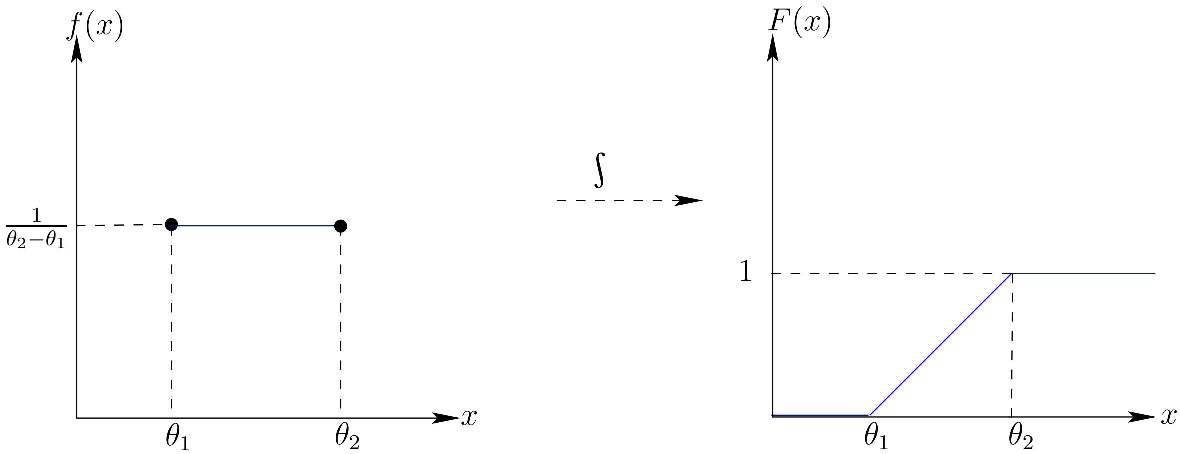
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} dx = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x dx = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{\theta_1}^{\theta_2} = \left. \frac{{\theta_2}^2 - {\theta_1}^2}{\theta_2 - \theta_1} \frac{1}{2} \right|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2},$$

ikinici momenti,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^2 \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} dx == \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^2 dx = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{\theta_1}^{\theta_2} = \left. \frac{{\theta_2}^3 - {\theta_1}^3}{\theta_2 - \theta_1} \frac{1}{3} \right|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{{\theta_2}^2 + \theta_1\theta_2 + {\theta_1}^2}{3}$$

ve varyansı,

$$Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{{\theta_2}^2 + \theta_1\theta_2 + {\theta_1}^2}{3} - \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right)^2 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}.$$



Şekil 1: X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu

1.1 Matlab Komutları

1.1.1 Düzgün(0,1) dağılımından rasgele sayı üretilmesi

Matlab'da (0,1) aralığında düzgün dağılımdan 100 tane sayı üretmek için rand(1,100) veya rand(100,1) komutu kullanılır.

rand komutunun genel kulanımı rand(satır sayısı,sütun sayısı) şeklindedir.

Örnek olarak Düzgün(0,1) dağılımından 4 satır ve 2 sütundan (4x2) oluşan bir Y matrisini oluşturmak istediğimizde kullanmamız gereken komut Y= rand(4,2) dir.

1.1.2 Düzgün(a,b) dağılımından rasgele sayı üretilmesi

Düzgün(a,b) dağılımından rasgele sayı üretmek için ters dönüşüm metodu kullanılarak rasgele sayı üretilebilir. Ters dönüşüm yönteminin algoritması,

- Düzgün(0,1) dağılımından U üretililir,
- $X = F^{-1}(U)$ hesaplanır.

Algoritmanın birinci adımı matlab'da rand komutu ile gerçekleştirilir. Algoritmanın ikinici adımı olan $F^{-1}(x)$'in hesaplanması,

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \to y = \frac{x-a}{b-a} \to (b-a)y = x-a \to x = a+(b-a)y \to y = a+(b-a)x,$$

burdan

$$F^{-1}(X) = a + (b-a)X,$$

olduğu açıktır ve X gördüğümüz yere Düzgün(0,1) dağılımdan üretilen sayıların konulması ile Düzgün(a,b) dağılımından sayı üretilebilir. $X \sim$ Düzgün(5,10) olmak üzere X rasgele değişkeninden 1000 tane sayı üretip, ortalamasını ve varyansının hesaplanması için gerekli komutlar:

```
a=5;
b=10;
Y= 5 + (10-5) * rand(1,1000);
mean(Y)
ans=
7.5154
var(Y)
ans=
1.9969
```

Örnek 1. (0,1) aralığından 1000 tane rasgele sayı çekildiğinde kaç tanesi 0.3 den küçüktür ?

$X \sim$ Düzgün(0,1) olmak üzere X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = 1$ dir. Soruda istenen olasılık

$$P(0 < X < 0.3) = \int_0^{0.3} 1dx = 0.3$$

olarak bulunur ve bu olasılık yardımı ile 1000 tane rasgele sayıdan $1000(0.3) = 300$ tanesi 0.3 den küçüktür.

Yukarıdaki örneği matlabda rasgele sayı üreterek yapmak için gerekli algoritma:

- Düzgün(0,1) dağılımından 1000 tane rasgele sayı üret,
- 0.3 den küçük olanları say ve ekrana yaz.

Yukarıdaki algoritmanın matlabda uygulanması:

```
» y= rand(1,1000);
» sum(y<0.3)
```

```
ans=
317
```

Üretilen 1000 sayıdan 317 tanesi 0.3 den küçüktür.
Yukarıdaki deneyi 1000 kere yapıp çıkan sonuçların ortalamasını alan Matlab kodu:

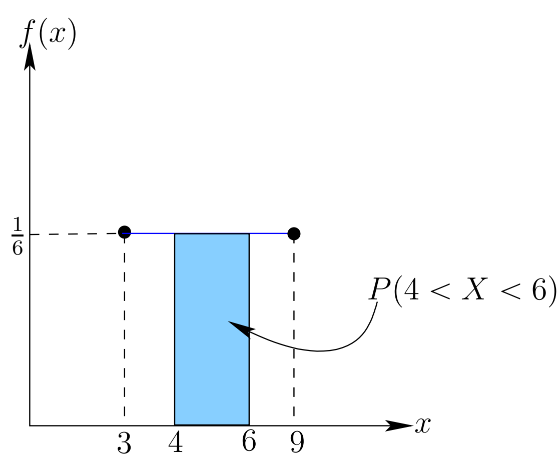
```
for i= 1:1000
z(i)= sum(rand(1,1000)<0.3);
end
mean(z)
ans=
300.1670
```

Yukarıda üretilen sayılardan ortalama 300.1 tanesi 0.3 den küçüktür.

Örnek 2. (3,9) aralığından 1000 tane rasgele sayı çekildiğinde kaç tanesi 4 ile 6 arasındadır? $X \sim$ Düzgün(3,9) olmak üzere X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{6}$ dir. Soruda istenen olasılık (Şekil 2de verilmiştir)

$$P(4 < X < 6) = \int_4^6 \frac{1}{6} dx = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur ve bu olasılık ile 1000 tane sayıdan $1000(\frac{1}{3}) = 333$ tanesi 4 ile 6 arasındadır.



Şekil 2: $P(4 < X < 6)$

$P(4 < X < 6)$ olasılığını matlabda hesaplamak için unifcdf komutu kullanılır. unifcdf komutunun genel kullanımı unifcdf(dağılım olasılığının hesaplanacağı değer, düzgün dağılımın alt sınırı, düzgün dağılımın üst sınır) şeklindedir. Bu komut ile $P(4 < X < 6)$ in hesaplanması:

```
unifcdf(6,3,9)-unifcdf(4,3,9)
```

```
ans=
0.3333
```

2 Üstel Dağılım

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

şeklinde ise X rasgele değişkenine üstel dağılıma sahiptir denir ve $X \sim Exp(\theta)$ ile gösterilir. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^x e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} - \theta\, e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^x = -e^{-\frac{x}{\theta}} + 1 = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$

şeklindedir ve genel ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

X rasgele değişkeninin beklenen değeri (birinci momenti),

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

kısmi integrasyon $(u = x, dv = e^{-\frac{x}{\theta}})$ yardımı ile

$$= \frac{1}{\theta} \left(-x\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^\infty + \theta \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}} dx \right) = -x e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^\infty - \theta e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^\infty = \lim_{r \to \infty} \left(-x e^{\frac{x}{\theta}} - \theta e^{-\frac{x}{\theta}} \right) \Big|_0^r = \theta$$

şeklinde bulunur. X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{\theta}-t)}dx = \frac{1}{\theta}\left.\frac{e^{-x(\frac{1}{\theta}-t)}}{t-\frac{1}{\theta}}\right|_0^\infty$$
$$= 0 - \frac{1}{\theta}\frac{1}{t-\frac{1}{\theta}} = -\frac{1}{\theta}\frac{\theta}{t\theta-1} = -\frac{1}{t\theta-1} = (1-\theta t)^{-1}$$

olup X rasgele değişkenin birinci ve ikinci momenti

$$\mathbb{E}(X) = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = -(1-\theta t)^{-2}(-\theta)\big|_{t=0} = \theta,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -2(1-\theta t)^{-3}\theta(-\theta)\big|_{t=0} = 2\theta^2.$$

Birinci ve ikinci momentlerin yardımı ile hesaplanan, X rasgele değişkeninin varyansı aşağıda verilmiştir.

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2\theta^2 - \theta^2.$$

Örnek 3. $X_1, X_2, ..., X_n$'ler $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ parametrelerine sahip birbirinden bağımsız üstel dağılımına sahip rasgele değişkenler olmak üzere $\min(X_1, X_2, ..., X_n)$'in dağılımını bulunuz.

X'lerin dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X_i \leqslant x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta_i}}, i = 1, 2, 3, ..., n$ olmak üzere $Y = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$ olsun bu bilgileri kullanarak

$$\begin{aligned} F(y) = P(Y \leqslant y) &= 1 - P(Y > y) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2, ..., X_n) > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, ..., X_n > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y), ..., P(X_n > y) \\ &= 1 - e^{-\frac{y}{\theta_1}}e^{-\frac{y}{\theta_2}}...e^{-\frac{y}{\theta_n}} \\ &= 1 - e^{-y\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}+...+\frac{1}{\theta_n}\right)} \end{aligned}$$

buradan da görüleceği üzere $Y = \min(X_1, X_2, ..., X_n) \sim \text{Exp}(\sum_{i=1}^n \theta_i)$

Örnek 4. X $\sim$Exp(θ) olmak üzere $P(X > s + t|X > t) = P(X > s)$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
P(X > s+t|X > t) &= \frac{P(X > s+t, X > t)}{P(X > t)} \\
&= \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} \\
&= \frac{e^{-\frac{s+t}{\theta}}}{e^{-\frac{t}{\theta}}} = e^{-\frac{s}{\theta}} \\
&= P(X > s)
\end{aligned}$$

2.1 Ters dönüşüm yöntemi ile Exp(θ) dağılımından sayı üretilmesi

Ters dönüşüm yöntemi ile sayı üretmek için gerekli algoritma:

- Düzgün(0,1) dağılımından U üretililir,
- $X = F^{-1}(U)$ hesaplanır.

Algoritmanın birinci adımı matlab'da rand komutu ile gerçekleştirilir. Algoritmanın ikinici adımı olan $F^{-1}(x)$'in hesaplanması,

$$\begin{gathered}
F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} \rightarrow y = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} \rightarrow e^{-\frac{x}{\theta}} = 1 - y \rightarrow -\frac{x}{\theta} = ln(1-y) \\
\rightarrow x = -\theta ln(1-y) \rightarrow y = -\theta ln(1-x) \rightarrow F^{-1}(x) = -\theta ln(1-x)
\end{gathered}$$

sonuç olarak $F^{-1}(x) = -\theta ln(1-x)$ olarak bulunur ve burada x gördüğümüz yere Düzgün(0,1) dağılımdan üretilen rasgele bir sayı koyarak θ dağılımlı üstel dağılımdan sayı üretmiş oluruz.

Örnek 5. $X \sim$ Exp(2) olmak üzere X dağılımından ters dönüşüm yöntemi ile 1000 adet rasgele sayı üreten ve ortalamasını hesaplayan matlab kodunu yazınız.

```
X= -2.*log(rand(1,1000)); mean(X)
```

```
ans=
1.9453
```

2.2 Matlab komutları

2.2.1 Exprnd komutu ile Exp(θ) dağılımında rasgele sayı üretilmesi

exprnd komutunun genel kullanımı exprnd(θ parametresi,satır sayısı,sütun sayısı) şeklindedir. Bu komut yardımı ile Exp(5) dağılımından 1000 tane sayı üreten ve varyansını hesaplayan Matlab kodu aşağıda verilmiştir.

```
X= exprnd(5,1,1000);
var(X)

ans=
25.0259
```

Örnek 6. X ~Exp(2) olmak üzere X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını Matlab da çiziniz.

Olasılık yoğunluk fonksiyonunu için exppdf ve plot komutları kullanılır.

```
x= 0:0.1:10;
y= exppdf(x,2);
plot(x,y)
```

Dağılım fonksiyonunu için expcdf ve plot komutları kullanılır.

```
x= 0:0.1:10;
y= expcdf(x,2);
plot(x,y)
```

Ödev 1. Aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni bir elektronik parçanın ömrünü (yıl olarak) göstermektedir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x > 0, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

- Bu parçanın en az 2 yıl dayanması olasılığını bulunuz.
- 3 yıl dayandığı bilinen parçanın 2 yıl daha dayanması olasılığını bulunuz.
- Ortalama dayanma süresini bulunuz

Ödev 2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

olmak üzere

- $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ olasılığını hesaplayınız.
- $P(X \geqslant 3)$ olasılığını hesaplayınız.
- $P(2 \leqslant X \leqslant 5 | X \geqslant 3)$ koşullu olasılığını hesaplayınız.