

MAT 472
KOMPLEKS ANALİZ

DERS NOTLARI

Prof. Dr. AYHAN ŞERBETÇİ

GİRİŞ

Kompleks düzlemde bir bölgede meydana gelen bir fiziksel problem, örneğin kararlı durum sıcaklıkları, elektrostatik, ideal sıvı akışı vs., bazı koşulların sağlanması durumunda bir harmonik fonksiyon ile ifade edilebilmektedir. Verilen bir bölgede harmonik olan ve bölgenin sınırı üzerinde bazı koşulları sağlayan bir $\phi(x, y)$ fonksiyonunu bulma problemine Dirichlet problemi adı verilir.

Eğer iki reel değişkenli ve reel değerli bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde harmonik ise bu durumda $\phi(x, y)$ nin D de bir $\psi(x, y)$ harmonik eşleniği vardır. Bu durumda $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ analitik fonksiyonuna kompleks potansiyel adı verilir. $F(z)$ kompleks potansiyelinin bir çok fiziksel yorumu vardır. Örneğin sıvı akışında $\phi(x, y) = \text{sabit}$ denklemi eşpotansiyellere ve $\psi(x, y) = \text{sabit}$ denklemi akıntı doğrularına karşılık gelirler ve bunlar birbirini dik keserler.

Konform dönüşüm bir bölgedeki açıları yön ve büyüklük bakımından koruyan bir analitik fonksiyondur. Bir konform dönüşüm ile z -düzleminde bir D bölgesindeki problemin çözümünün kolayca elde edilebilmesi için bu bölge w -düzlemindeki bir G bölgesine dönüştürülür. Bu durumda eğer bir bire-bir konform dönüşüm $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ve $\phi(x, y)$, D de harmonik bir fonksiyon ise ters dönüşüm ile elde edilen $\Phi(u, v) = \phi[x(u, v), y(u, v)]$ fonksiyonu da G de harmoniktir. Yani, konform dönüşüm altında Laplace denklemi ve sınır koşulları değişmez kalır. Böylece D deki bir sınır değer problemi $w = f(z)$ konform dönüşümü ile G üzerinde yeni bir sınır değer problemine karşılık getirilmiş olur. Problemin çözümü bu bölgelerden birisinde elde edildiğinde diğeri üzerindeki çözüm ters dönüşüm ile kolayca elde edilir.

Burada incelenmiş olan konform dönüşüm teknikleri ile çözülebilen fiziksel problemler (kararlı durum ısı akışı, elektrostatik ve ideal sıvı akışı) gerçek hayattaki uygulamalardır ve çözümleri üç-boyutlu kartezyen uzayda verilir. Böyle problemler genellikle üç değişkenli Laplace denklemi, üç-boyutlu vektör fonksiyonlarının curl ve divergensini içerir. Kompleks analiz x ve y değişkenlerini içerdiğinden, xy -düzlemine dik eksen boyunca koordinatlı noktalarda çözümün değişmediği özel durumu göz önüne alınmaktadır.

Bu ders notu, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü dördüncü sınıf öğrencilerine okutulmakta olan bir yarı yıllık Kompleks Analiz dersi için hazırlanmıştır. Bunun için özellikle “Mathews, J.H. and Howell, R.W. (2001), Complex Analysis, Jones And Bartlett Publishers, Boston” isimli kitaptan geniş ölçüde yararlanılmıştır. Notlar 14 haftalık ders dönemine göre sınıflandırılmıştır.

Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Ankara Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Ankara, 2018