0. ÖN BİLGİLER

0.1. Analitik Fonksiyonlar

Tanım 0.1.1. D kompleks düzlemde bir bölge ve f, D üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer bir $z_0 \in D$ için

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa bu durumda f ye z_0 da diferensiyellenebilirdir denir. Bu limite f nin z_0 daki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 0.1.2. D kompleks düzlemde bir bölge ve f, D üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer bir $z_0 \in D$ için $f'(z_0)$ mevcut ve z_0 ın bir komşuluğundaki her noktada $f'(z)$ türevi varsa bu durumda f ye z_0 da analitiktir denir. Eğer f D nin her noktasında analitik ise veya eşdeğer olarak f D nin her noktasında diferensiyellenebilir ise bu durumda f ye D de analitik denir

Tanım 0.1.3. D kompleks düzlemde bir bölge ve f, D üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer bir $z_0 \in D$ için f, z_0 da analitik değil fakat z_0 ın her komşuluğundaki en az bir noktada analitik ise bu durumda z_0 a f nin bir singüler noktası denir. Eğer f, bir z_0 singüler noktasının bir komşuluğunda bulunan her noktada analitik ise z_0 a ayrık singüler nokta adı verilir.

Tanım 0.1.4. C kompleks düzlemin tamamında analitik olan bir fonksiyona tam fonksiyon denir.

Teorem 0.1.5. Eğer $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise bu durumda reel değerli u ve v fonksiyonları D bölgesinde harmoniktir. Yani, u ve v nin D de sürekli birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri vardır ve burada ikinci kısmi türevler için

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Laplace denklemi sağlanır.

Teorem 0.1.6. Eğer D kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge ve $u(x, y)$ D de harmonik bir fonksiyon ise bu durumda $u(x, y)$ nin D de daima bir $v(x, y)$ harmonik eşleniği vardır. Yani öyle bir $v(x, y)$ reel değerli fonksiyonu bulunabilir ki $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu D de analitiktir.

0.2. Konform Dönüşümler

Tanım 0.2.1. $w = f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer f, z_0 dan geçen yönlendirilmiş eğriler arasındaki açıları yön ve büyüklük bakımından koruyorsa bu durumda $w = f(z)$ dönüşümüne z_0 da konformdur denir.

Teorem 0.2.2. $w = f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $f(z_0) \neq 0$ ise bu durumda f, z_0 da konformdur.

Örnek 0.2.3. $f(z) = e^Z$ dönüşümü kompleks düzlemin tamamında konformdur.

Çözüm. $\forall z \in C$ için $f'(z) = e^Z \neq 0$ olduğu açıktır. Çünkü $e^Z = e^x \cos y + ie^x \sin y = 0$ olması durumunda aynı anda $\cos y = \sin y = 0$ olması gerekir ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla f kompleks düzlemin tamamında konformdur. Örneğin birbirini dik kesen $x = a$ *ve* $y = b$ doğrularının görüntüleri de dik kesişirler:

$$z = x + iy \xrightarrow{e^Z} e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = \rho\, e^{i\phi}$$

$$(x, y) \longrightarrow (\rho, \phi) = \left(e^x, y\right)$$

olduğundan $\rho = e^x$, $\phi = y$ *den* $x = a \Rightarrow \rho = e^a$, $y = b \Rightarrow \phi = b$ (yani, orijin merkezli e^a yarıçaplı çember ve orijinden çıkan pozitif reel eksen ile *b* açısı yapan ışın) elde edilir. $\rho = e^a$ ve $\phi = b$ arasındaki açı diktir, çünkü merkezden çıkan bir ışın ile çemberi kestiği noktadaki teğet doğrusu birbirine dik olur.

Örnek 0.2.4. $w = f(z) = \sin z$ dönüşümü $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y \in R$ düşey şeridini bire-bir ve konform olarak $u \leq -1$, $v = 0$ ve $u \geq 1$, $v = 0$ ışınları boyunca kesilmiş *w*-düzlemi üzerine dönüştürür.

Çözüm. $u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ denkleminden

$$u = \sin x \cosh y$$
$$v = \cos x \sinh y$$

dir. Buradan $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, $y \in R$ olmak üzere $x = a$ doğrularının görüntüleri odakları $(\pm 1,0)$ olan $\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1$ hiperbolleridir. $x = a$ doğrusunun görüntüsü *a* pozitif iken hiperbolün sağ dalı ve *a* negatif iken hiperbolün sol dalıdır. $x = 0$ doğrusunun görüntüsü *v*-eksenidir (Benzer düşünceyle $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y = b$ yatay doğru parçaları odakları $(\pm 1,0)$ olan $\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$ elipsleri üzerine dönüşür. $y = b$ doğru parçasının görüntüsü *b* pozitif iken elipsin üst yarısı ve b negatif iken elipsin alt yarısıdır). Verilen şerit üzerinde $f'(z)=\cos z\neq 0$ olduğundan dönüşüm konformdur.

Örnek 0.2.5. Ters sinüs fonksiyonunun esas değeri olan $w=f(z)=Arc\sin z$ fonksiyonu:

$x+iy=\sin w=\sin u\cosh v+i\cos u\sinh v$ den $\dfrac{x^2}{\sin^2 u}-\dfrac{y^2}{\cos^2 u}=1$ dir. Eğer u sabit kabul edilirse bu denklem xy-düzleminde odakları $(\pm 1,0)$ olan hiperbol gösterir. Odaklara olan uzaklıklar farkı $2\sin u$ dur. Dolayısıyla hiperbol üzerinde bulunan bir (x,y) noktası için

$$2\sin u=\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

denklemi sağlanır. Buradan

$$u(x,y)=Arc\sin\left[\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2}\right]$$

elde edilir. Bu denklemde kullanılan fonksiyon için $-\dfrac{\pi}{2}<Arc\sin t<\dfrac{\pi}{2}$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Benzer düşünceyle $\dfrac{x^2}{\cosh^2 v}+\dfrac{y^2}{\sinh^2 v}=1$ denkleminde v sabit kabul edildiğinde odakları $(\pm 1,0)$ ve büyük eksen uzunluğu $2\cosh v$ olan elips elde edilir. Dolayısıyla elips üzerinde bulunan bir (x,y) noktası için

$$2\cosh v=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

denklemi sağlanır. Buradan

$$v(x,y)=(\operatorname{sgn} y)Arc\cosh\left[\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2}\right]$$

elde edilir.

Örnek 0.2.4. de z ve w nin rollerini değiştirdiğimizde görürüz ki $w=Arc\sin z$ fonksiyonu $x\leq -1,\ y=0$ ve $x\geq 1,\ y=0$ ışınları boyunca kesilmiş z-düzlemini bire-bir ve konform olarak $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2},\ v\in R$ düşey şeridi üzerine dönüştürür. Ayrıca, $w=Arc\sin z$ dönüşümü altında $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı-düzleminin $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2},\ v>0$ yarı sonsuz şeridine ve $\operatorname{Im} z<0$ alt yarı-düzleminin $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2},\ v<0$ yarı sonsuz şeridine dönüştüğü kolayca görülebilir.

Örnek 0.2.6. $w=\log z=\ln|z|+i\arg z$ fonksiyonu $r=a$ ve $r=b$ çemberleri arasındaki halka bölgeyi w-düzlemindeki $\ln a<u<\ln b$ sonsuz şeridi üzerine dönüştürür.

Çözüm.

$$z = re^{\theta i} \xrightarrow{\log z} u + iv = \ln r + i\theta$$
$$(r,\theta) \longrightarrow (u,v) = (\ln r, \theta)$$

olduğundan $a < r < b \Rightarrow \ln a < u < \ln b$, $v = \theta \in R$ sonsuz düşey şeridi elde edilir.

Tanım 0.2.7. D_1 ve D_2 kompleks düzlemde iki bölge olsun. Eğer bir $f : D_1 \to D_2$ birebir ve üzerine konform dönüşümü varsa bu durumda D_1 ve D_2 ye konform eşdeğerdir denir.

Teorem 0.2.8. (Riemann Dönüşüm Teoremi) Eğer $G(\neq C)$ kompleks düzlemin basit bağlantılı bir alt bölgesi ise bu durumda G, D birim dairesine konform eşdeğerdir.

Tanım 0.2.9. a,b,c,d kompleks sabitler ve $ad \neq bc$ olmak üzere $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki bir dönüşüme kesirli lineer dönüşüm veya Mobiüs dönüşümü denir. Bir kesirli lineer dönüşüm, çemberler ve doğruları yine çemberler ve doğrulara dönüştürür.

Teorem 0.2.10. Bir $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ kesirli lineer dönüşümü $C - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ den $C - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ üzerine bir birebir ve konform dönüşümdür.

Örnek 0.2.11. $w = \dfrac{i(1-z)}{1+z}$ kesirli lineer dönüşümü $|z| < 1$ birim diskini $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzlemine dönüştüren bir bire-bir konform dönüşümdür.

Çözüm. Gerçekten,

$$w = \frac{i(1-z)}{1+z} \Rightarrow |z| = \left|\frac{-w+i}{w+i}\right| < 1 \Rightarrow |-w+i| < |w+i| \Rightarrow |-u + i(-v+1)| < |u + i(v+1)| \Rightarrow v > 0$$

Yani, $\operatorname{Im} w > 0$ elde edilir. Verilen bölgede $w'(z) \neq 0$ olduğundan dönüşüm konformdur.
Ayrıca,

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i\frac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} \tag{0.2}$$

$$z = \frac{-w+i}{w+i} = \frac{-u^2 - v^2 + 1}{u^2 + (1+v)^2} + i\frac{2u}{u^2 + (1+v)^2} = x + iy$$

denirse bu durumda (0.2) denklemine göre $y > 0, 1 - x^2 - y^2 = 0$ üst yarım çemberi üzerinde bulunan $z = x + iy$ noktaları pozitif *u*-ekseni üzerine dönüşür. Benzer şekilde alt yarı çember negatif *u*-ekseni üzerine dönüşür.