1. LAPLACE DENKLEMİNİN DEĞİŞMEZLİĞİ VE HARMONİK FONKSİYONLAR İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

1.1. Laplace Denkleminin Değişmezliği

Aşağıdaki teorem uygun bir analitik dönüşüm altında Laplace denkleminin nasıl değişmez kaldığını göstermektedir.

Teorem 1.1.1. (Laplace denkleminin değişmezliği) $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ z-düzlemindeki bir D bölgesini w-düzlemindeki bir G bölgesine dönüştüren birebir ve üzerine bir konform dönüşüm olsun. Eğer $\phi(x,y)$ D üzerinde sürekli birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ise bu durumda $z = f^{-1}(w)$ ters dönüşümü yardımıyla $\phi(x,y)$ fonksiyonu

$$\Phi(u,v) = \phi\left[x(u,v), y(u,v)\right] \qquad \text{ve} \qquad \Phi = \phi \circ f^{-1} \left(\text{veya } \Phi \circ f = \phi\right)$$

bileşke fonksiyonuna dönüşür. Bu fonksiyon G üzerinde sürekli ikinci kısmi türevlere sahiptir ve $\phi(x,y) = \Phi\left[u(x,y), v(x,y)\right]$ sağlanır. Bu durumda Laplace denklemi değişmez kalır. Yani,

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \Leftrightarrow \Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0$$

dır.

İspat. $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ birebir ve üzerine olduğundan $z = f^{-1}(w)$ ters dönüşümü vardır.

$$\left.\begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\}$$

$$\Phi(u,v) = \phi\left[x(u,v), y(u,v)\right] \Leftrightarrow \phi(x,y) = \Phi\left[u(x,y), v(x,y)\right]$$

dir. $\phi(x,y) = \Phi\left[u(x,y), v(x,y)\right]$ denkleminden $\phi_x = \Phi_u u_x + \Phi_v v_x$ ve $\phi_y = \Phi_u u_y + \Phi_v v_y$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= \left(u_x^{\,2} + u_y^{\,2}\right)\Phi_{uu} + \left(v_x^{\,2} + v_y^{\,2}\right)\Phi_{vv} + 2\left(u_x v_x + u_y v_y\right)\Phi_{uv} \\ &\quad + \left(u_{xx} + u_{yy}\right)\Phi_u + \left(v_{xx} + v_{yy}\right)\Phi_v \end{aligned}$$

$f = u + iv$ analitik olduğundan $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır ve $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $v_{xx} + v_{yy} = 0$ yani u ile v D de harmoniktir. Ayrıca,

$$f'(z) = u_x + iv_x \quad \Leftrightarrow \quad u_x^{\,2} + u_y^{\,2} = v_x^{\,2} + v_y^{\,2} = \left|f'(z)\right|^2$$

dir. Buradan

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=\left|f'(z)\right|^2\left(\Phi_{uu}+\Phi_{vv}\right)$$

elde edilir. *f*, *D* de konform olduğundan $f'(z)\neq 0$ dır dolayısıyla Laplace denklemi konform dönüşüm altında değişmez kalır.

Örnek 1.1.2. $\phi(x,y)=xy+1$ fonksiyonu ve $w=u+iv=Log\, z$ dönüşümünü göz önüne alalım. $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı-düzleminde $Log\, z$ esas logaritma fonksiyonu Teorem 1.1.1 in şartlarını sağlar. Bu fonksiyonun tersi

$$x+iy=e^w=e^u\left(\cos v+i\sin v\right)$$

dir. Böylece,

$$x=e^u\cos v \quad \text{ve} \quad y=e^u\sin v$$

dir. Φ bileşke fonksiyonu

$$\Phi(u,v)=\left(e^u\cos v\right)\left(e^u\sin v\right)+1=e^{2u}\cos v\sin v+1$$

dir. $w=Log\, z$ altında $\operatorname{Im} z>0$ ın görüntüsü $-\infty<u<\infty$, $0<v<\pi$ şerididir. Kolayca gösterilebilir ki $\phi(x,y)$ üst yarı-düzlemde ve $\Phi(u,v)$ de şeritte harmoniktir.

Örnek 1.1.3. $\phi(x,y)=Arc\tan\dfrac{2x}{x^2+y^2-1}$ fonksiyonunun $|z|<1$ de harmonik olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f(z)=\dfrac{i+z}{i-z}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşüm $|z|<1$ birim dairesini $\operatorname{Re} w>0$ sağ yarı-düzlemi üzerine bir bire-bir konform dönüşümdür.

$$f(z)=\frac{i+z}{i-z}=\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}-i\,\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}=u(x,y)+i\,v\,(x,y)$$

$\Phi(u,v)=Arc\tan\dfrac{v}{u}=Arg\,(u+iv)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} w>0$ da harmoniktir. Buradan,

$$\phi(x,y)=\Phi\left[u(x,y),v(x,y)\right]=Arc\tan\frac{v(x,y)}{u(x,y)}=Arc\tan\frac{2x}{x^2+y^2-1}$$

fonksiyonu Laplace denkleminin değişmezliğinden dolayı harmonik olur.