1.2. Belirli Sınır Koşullarını Sağlayan Bir Harmonik Fonksiyonun Bulunması

Örnek 1.2.1. $a \le \operatorname{Re} z \le b$ düşey şeridinde harmonik olan bir $u(x, y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki $x = a$ ve $x = b$ düşey doğruları üzerinde sırasıyla $u(a, y) = u_1$ ve $u(b, y) = u_2$ sınır değerlerini alsın.

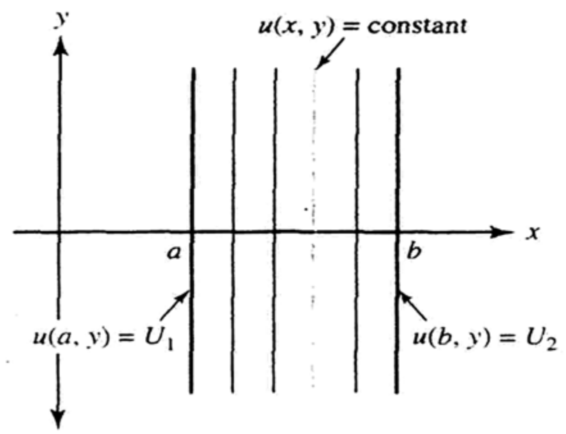
Çözüm: Sezgisel olarak $u(x, y)$ nin sadece x in bir fonksiyonu olduğunu ve $x = x_0$ biçimindeki düşey doğruları boyunca sabit değerler aldığını düşünürüz.
Yani,
$u(x, y) = P(x)$, $a \le x \le b$, $y \in R$ dir ve $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ Laplace denklemi $P''(x) = 0$ olmasını gerektirir. Buradan m ve c sabit olmak üzere

$$P(x) = mx + c$$

dir. $u(a, y) = P(a) = u_1$ ve $u(b, y) = P(b) = u_2$ sınır koşullarının sağlanabilmesi için

$$u(x, y) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{b - a}(x - a)$$

olmalıdır.



Şekil 1

Not: Eğer bir eğri boyunca bir ϕ harmonik fonksiyonu sabit kalırsa bu eğriye ϕ nin düzey eğrisi denir. xy-düzlemindeki bir $\phi(x, y) = C$ düzey eğrisi bir $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ konform dönüşümü altında uv-düzleminde

$$\Phi[(u(x, y), v(x, y)] = C$$

düzey eğrisine dönüşür. Bu durumda özel olarak xy-düzlemindeki bir bölge üzerinde ϕ nin sabit bir değer aldığı herhangi sınır parçası, kendisine uv-düzleminde karşılık gelen öyle bir eğriye dönüşür ki, bu eğri boyunca Φ nin değeri sabit kalır. Yani, ilk problemdeki $\phi = C$ koşulu, dönüştürülmüş problem üzerine taşınır. Daha açık olarak bir konform dönüşüm ile ϕ üzerindeki sınır koşulları değişmez kalır.

Örnek 1.2.2. $0 < Arg\, z < \alpha$, $(\alpha \le \pi)$ daire kesmesinde harmonik olan bir $\psi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\psi(x,0) = C_1 \;, \qquad x > 0$$
$$\psi(x,y) = C_2 \;, \qquad \theta = \alpha, \;\; \mathrm{r} > 0$$

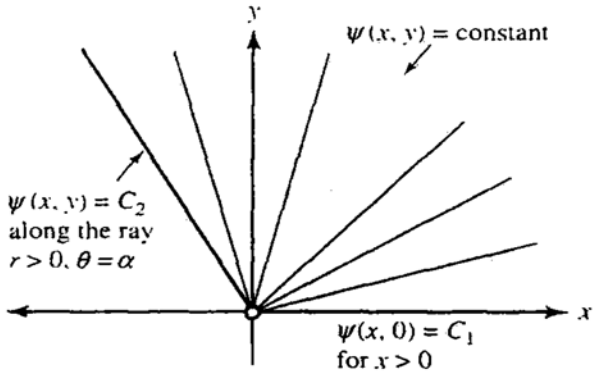
sınır değerlerini alsın.

Çözüm. $Arg\, z$ fonksiyonu verilen daire kesmesinde harmoniktir ve orijinden çıkan ışınlar boyunca sabittir (Şekil 2). a ve b reel sabitler olmak üzere bir çözümün

$$\psi(x,y) = a + b\, Arg\, z$$

olduğunu görürüz. Sınır koşullarından $\psi(x,y) = C_1 + \dfrac{C_2 - C_1}{\alpha} Arg\, z$

olduğu ortaya çıkar.



Şekil 2

$$\phi(x,y) = C_1 + \frac{C_2 - C_1}{\alpha_2 - \alpha_1}(Arg z - \alpha_1)$$

Örnek 1.2.3. $1 < |z| < R$ halkasında harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

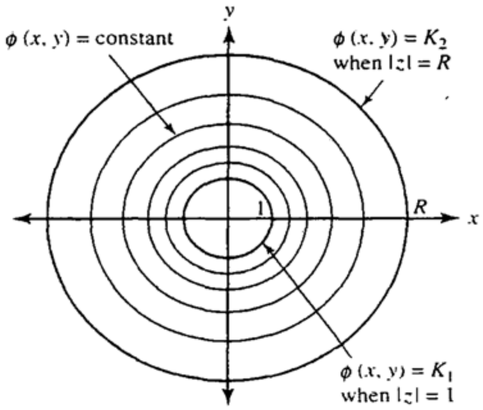
$$|z| = 1 \quad \text{iken} \quad \phi(x,y) = K_1$$
$$|z| = R \quad \text{iken} \quad \phi(x,y) = K_2$$

sınır değerlerini alsın.

Çözüm. Örnek 1.2.2 dekine benzer düşünce ile, $\ln|z|$, $z \ne 0$ için harmoniktir. Buradan

$$\phi(x,y) = K_1 + \frac{K_2 - K_1}{\ln R} \ln|z|$$

bulunur. Şekil 3 de görüldüğü gibi $\phi(x,y) = sabit$ düzey eğrileri iç içe çemberlerdir.



Şekil 3

Ek. $R_1 < |z| < R_2$

$$|z| = R_1 \Rightarrow \phi = K_1$$

$$|z| = R_2 \Rightarrow \phi = K_2$$

$$\phi(x,y) = K_1 + \frac{K_2 - K_1}{\ln R_2 - \ln R_1}(\ln|z| - \ln R_1)$$

Problemler.

1. $\{ z : 1 < \operatorname{Im} z < 2 \}$ yatay şeridinde harmonik olan öyle bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz ki $\phi(x,1) = 6,\ x \in R$ ve $\phi(x,2) = -3, x \in R$ sınır koşulları sağlansın.

2. $\{ z :\ \operatorname{Im} z > 0 \}$ üst yarı düzleminde harmonik olan öyle bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$\phi(x,0) = 1,\ -1 < x < 1$ ve $\phi(x,0) = 0,\ |x| > 1$ sınır koşulları sağlansın.

3. $\left\{ z : 0 < Argz < \frac{\pi}{3} \right\}$ daire kesmesinde harmonik olan öyle bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz ki $Argz = \frac{\pi}{3}$ için $\phi(x,y) = 2$ ve $x > 0$ için $\phi(x,0) = 1$ sınır koşulları sağlansın.

4. $\{ z : 1 < |z| < 2 \}$ halkasında harmonik olan öyle bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz ki $|z| = 1$ için $\phi(x,y) = 5$ ve $|z| = 2$ için $\phi(x,y) = 8$ sınır koşulları sağlansın.