1.3. Dirichlet Problemi

D kompleks düzlemde bir bölge olsun ve D nin sınırının uç uca birleştirilmiş parçalı düzgün eğrilerden oluştuğunu kabul edelim. Dirichlet problemi, D de harmonik ve D nin sınırı üzerinde belirli değerleri alan bir ϕ fonksiyonu bulma problemidir.

Örnek 1.3.1. Gösteriniz ki

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{\pi} Arc\tan\frac{v}{u-u_0} = \frac{1}{\pi} Arg\,(w-u_0)$$

fonksiyonu $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzleminde harmoniktir ve

$$u > u_0 \quad \text{için} \quad \Phi(u,0) = 0$$
$$u < u_0 \quad \text{için} \quad \Phi(u,0) = 1$$

sınır koşullarını sağlar.

Çözüm. $g(w) = \frac{1}{\pi} Log\,(w-u_0) = \frac{1}{\pi}\ln|w-u_0| + \frac{i}{\pi} Arg\,(w-u_0)$

fonksiyonu $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzleminde analitiktir ve dolayısıyla onun imajiner kısmı olan $\frac{1}{\pi} Arg\,(w-u_0)$ fonksiyonu harmoniktir.

Not: Burada $Arc\tan t$ fonksiyonu değer kümesi $0 < Arc\tan t < \pi$ olan ters tanjant fonksiyonunu gösterir ve $Arc\tan(\pm\infty) = \frac{\pi}{2}$ dir. Böylece,

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{\pi} Arc\tan\left(\frac{v}{u-u_0}\right)$$

çözümünü elde ederiz.

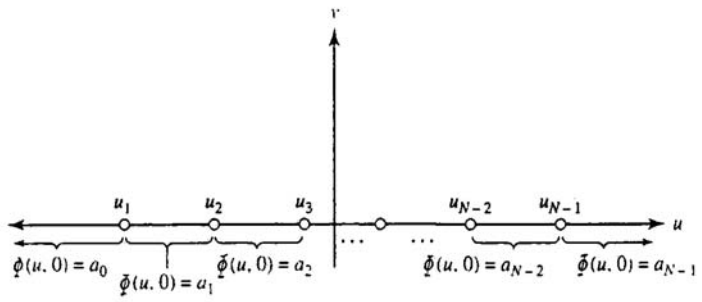
Teorem 1.3.2. (Üst yarı-düzlem için N-değer Dirichlet problemi) $u_1, u_2, ...u_{N-1}$ $N-1$ tane reel sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k-1}-a_k)\,Arg\,(w-u_k) \\ &= a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k-1}-a_k)\,Arc\tan\frac{v}{u-u_k}\end{aligned} \tag{1.1}$$

fonksiyonu $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzleminde harmoniktir ve

$$\Phi(u,0) = a_0 \quad , \quad u < u_1$$
$$\Phi(u,0) = a_k \quad , \quad u_k < u < u_{k+1} \quad , \quad k = 1,2,...,N-2$$
$$\Phi(u,0) = a_{N-1} \quad , \quad u > u_{N-1}$$

sınır koşullarını sağlar.



Şekil 4

İspat: (1.1) denklemindeki toplamın her bir terimi $\operatorname{Im} w > 0$ da harmonik olduğundan Φ de burada harmoniktir. Φ nin belirtilen sınır koşullarını sağladığını göstermek için j yi sabit tutalım ve $u_j < u < u_{j+1}$ diyelim. Örnek 1.3.1 den

$$\frac{1}{\pi} Arg\left(u - u_k\right) = 0 \quad , \quad k \le j \qquad \text{ve}$$
$$\frac{1}{\pi} Arg\left(u - u_k\right) = 1 \quad , \quad k > j$$

dir. Bu denklemleri (1.1) denkleminde yerine yazarsak, $u_j < u < u_{j+1}$ için

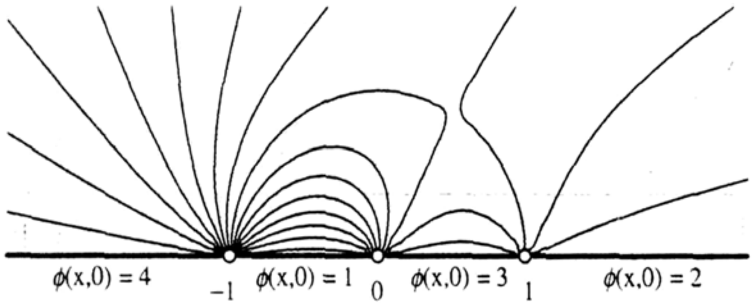
$$\begin{aligned} \Phi(u,0) &= a_{N-1} + \sum_{k=1}^{j} \left(a_{k-1} - a_k\right)(0) + \sum_{k=j+1}^{N-1} \left(a_{k-1} - a_k\right)(1) \\ &= a_{N-1} + \left(a_{N-2} - a_{N-1}\right) + ... + \left(a_{j+1} - a_{j+2}\right) + \left(a_j - a_{j+1}\right) \\ &= a_j \end{aligned}$$

elde edilir. $u < u_1$ ve $u > u_{N-1}$ için

$$u < u_1 \quad \Rightarrow \frac{1}{\pi} Arg\left(u - u_k\right) = 1 \quad (\forall k)$$
$$u > u_{N-1} \quad \Rightarrow \frac{1}{\pi} Arg\left(u - u_k\right) = 0 \quad (\forall k)$$

olduğu göz önüne alınarak kalan sınır koşullarının sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Örnek 1.3.3. $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki aşağıdaki Şekil 5 de belirtilen sınır koşullarını sağlasın.



Şekil 5

Çözüm. Bu, $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde bir 4-değer Dirichlet problemidir. z -düzlemi için (1.1) denklemi

$$\phi(x, y) = a_3 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{3} (a_{k-1} - a_k) Arg(z - x_k)$$

olur. $a_0 = 4, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2$ ve $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ değerlerini bu denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= 2 + \frac{4-1}{\pi} Arg(z+1) + \frac{1-3}{\pi} Arg(z-0) + \frac{3-2}{\pi} Arg(z-1) \\ &= 2 + \frac{3}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x+1} - \frac{2}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x} + \frac{1}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x-1} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Örnek 1.3.4. $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\phi(x,0) = 1 \ , \ |x| < 1$$
$$\phi(x,0) = 0 \ , \ |x| > 1$$

sınır koşulları sağlansın.

Çözüm. Bu, 3-değer Dirichlet problemidir, $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0$ ve $x_1 = -1, x_2 = 1$ dir. (1.1) denkleminden istenen fonksiyon

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= 0 + \frac{0-1}{\pi} Arg(z+1) + \frac{1-0}{\pi} Arg(z-1) \\ &= -\frac{1}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x+1} + \frac{1}{\pi} Arc\tan\frac{y}{x-1} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Problemler.

1. $\{z = (x, y) : x > 0,\ y > 0\}$ birinci çeyrek bölgesinde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$\phi(0, y) = 1, \quad y > 1\,; \qquad \phi(0, y) = 2, \quad 0 < y < 1 \quad ve$

$\phi(x,0) = 2, \quad 0 \le x < 1; \quad \phi(x,0) = 1, \quad x > 1$

sınır koşulları sağlansın.

2. $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(x,0) = 3,\ x < -3,$$
$$\phi(x,0) = 7,\ -3 < x < -1,$$
$$\phi(x,0) = 1,\ -1 < x < 2,$$
$$\phi(x,0) = 4,\quad x > 2$$

sınır koşulları sağlansın.

3. $\{z : \operatorname{Im} z > 0 \text{ ve } \operatorname{Re} z > 0\}$ birinci bölgesinde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(x,0) = 10,\quad x > 1$$
$$\phi(x,0) = 20,\quad 0 < x < 1$$
$$\phi(0,y) = 20,\quad 0 \le y < 1$$
$$\phi(0,y) = 10,\quad y > 1$$

sınır koşulları sağlansın.

4. $\{z : \operatorname{Im} z > 0 \text{ ve } |z| > 1\}$ (yani üst yarı düzlemin birim çemberin dışında kalan kısmı) bölgesinde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(x,y) = 1,\quad |z| = 1,\ \ 0 < \arg z < \pi$$
$$\phi(x,y) = -1,\quad |x| > 1,$$

sınır koşulları sağlansın.

5. İç içe yerleştirilmiş $r = 1$ ve $r = 2$ çemberleri arasında öyle bir $\phi(x, y)$ harmonik fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(x,y) = 100,\ |z| = 1$$
$$\phi(x,y) = 200,\ |z| = 2$$

sınır koşulları sağlansın.

6. $\{z : 2 < |z| < 3\}$ halka bölgesinde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(x,y) = 5,\quad |z| = 2,$$
$$\phi(x,y) = 8,\quad |z| = 3$$

sınır koşulları sağlansın.