1.5. Üst Yarı-Düzlem İçin Poisson İntegral Formülü

$\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzlemi için Dirichlet problemi; üst yarı-düzlemde harmonik ve $\phi(x,0) = u(x)$ sınır değerlerine sahip olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulmaktır, burada $u(x)$ bir reel değişkenli ve reel-değerli fonksiyondur.

Teorem 1.5.1. (Poisson İntegral Formülü) $u(t)$, her $t \in R$ için parçalı sürekli ve sınırlı, reel-değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\phi(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)dt}{(x-t)^2 + y^2} \tag{1.3}$$

fonksiyonu $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmoniktir ve u sürekli iken

$$\phi(x,0) = u(x)$$

sınır değerine sahiptir.

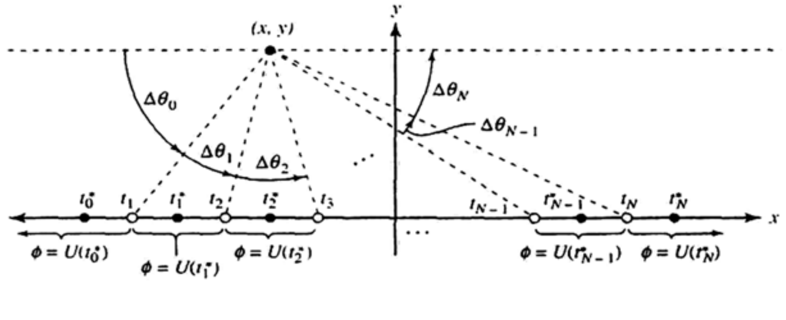
İspat. (1.3) denklemini N-değer Dirichlet probleminin sonuçlarından belirlemek kolaydır. $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ x-ekseni boyunca yerleştirilmiş N tane noktayı göstersin. $t_0^* < t_1^* < \cdots < t_N^*$, $k = 1,2,\ldots,N$ için $t_{k-1}^* < t_k < t_k^*$ olacak biçimde seçilmiş $N+1$ tane nokta olsun. Bu durumda N-değer Dirichlet probleminden

$$\phi(x,y) = u(t_N^*) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \left[u(t_{k-1}^*) - u(t_k^*) \right] Arg(z - t_k)$$

fonksiyonu üst yarı-düzlemde harmoniktir ve

$$\begin{aligned} \phi(x,0) &= u(t_0^*) \quad , \quad x < t_1 \\ \phi(x,0) &= u(t_k^*) \quad , \quad t_k < x < t_{k+1} \\ \phi(x,0) &= u(t_N^*) \quad , \quad x > t_N \end{aligned}$$

sınır değerlerini alır.



Şekil 10

Bir kompleks sayının argümentinin özelliklerini kullanırsak

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\pi}u\left(t_0^*\right)Arg\left(z-t_1\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}u\left(t_k^*\right)Arg\left(\frac{z-t_{k+1}}{z-t_k}\right)+\frac{1}{\pi}u\left(t_N^*\right)\left[\pi-Arg\left(z-t_N\right)\right]$$

yazabiliriz. Buradan ϕ değeri (ağırlık anlamında)

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N}u\left(t_k^*\right)\Delta\theta_k$$

ile verilir, burada $k=0,1,\ldots,N$ için $\Delta\theta_k$ açıları toplamı π dir. Bu, yukarıda Şekil 10 da gösterilmiştir.

$$\theta=Arg\left(z-t\right)=Arc\tan\frac{y}{x-t}\quad,\quad d\theta=\frac{ydt}{\left(x-t\right)^2+y^2}$$

değişken değişimi yapılırsa

$$\phi(x,y)=\frac{y}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{u\left(t_k^*\right)\Delta t_k}{\left(x-t_k^*\right)^2+y^2}$$

elde edilir. Bu Riemann toplamının limiti

$$\phi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u\left(t\right)dt}{\left(x-t\right)^2+y^2}$$

genelleştirilmiş integrali olur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

Örnek 1.5.2. $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\phi(x,0)=1\quad,\quad -1<x<1$$
$$\phi(x,0)=0\quad,\quad |x|>1$$

sınır değerlerine sahip olsun.

Çözüm. Poisson integral formülünden

$$\int\frac{ydt}{(x-t)^2+y^2}=\int\frac{\dfrac{y}{(x-t)^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x-t}\right)^2}dt$$

$u=\dfrac{y}{x-t}\Rightarrow du=\dfrac{y}{(x-t)^2}dt=\displaystyle\int\frac{du}{1+u^2}=\arctan u=\arctan\frac{y}{x-t}$ olduğundan

$$\phi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(x-t)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ydt}{(x-t)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-t}\bigg|_{t=-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-1}-\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x+1}$$
elde edilir.

Örnek 1.5.3 $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\phi(x,0)=x \quad , \quad -1<x<1$$
$$\phi(x,0)=0 \quad , \quad |x|>1$$

sınır değerlerine sahip olsun.

Çözüm. Poisson integral formülünden

$$\phi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{tdt}{(x-t)^2+y^2}=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(x-t)(-1)dt}{(x-t)^2+y^2}+\frac{x}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ydt}{(x-t)^2+y^2}$$
$$=\frac{y}{2\pi}\ln\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}+\frac{x}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-1}-\frac{x}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x+1}$$

elde edilir. $\phi(x,y)$ fonksiyonu üst yarı-düzlemde süreklidir. $\phi(x,0)$ fonksiyonu reel eksen üzerinde $x=\pm1$ de süreksizliğe sahiptir.

Örnek 1.5.4. $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu bulunuz öyle ki

$$\phi(x,0)=x \quad , \quad |x|<1$$
$$\phi(x,0)=-1 \quad , \quad x<-1$$
$$\phi(x,0)=1 \quad , \quad x>1$$

sınır değerlerine sahip olsun.

Çözüm. N-değer Dirichlet problemindeki yöntemi kullanarak

$$v(x,y)=1-\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x+1}-\frac{1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-1}$$

fonksiyonunu buluruz. Bu fonksiyon üst yarı-düzlemde harmonik ve $|x|<1$ için $v(x,0)=0$, $x<-1$ için $v(x,0)=-1$ ve $x>1$ için $v(x,0)=1$ sınır değerlerine sahiptir. Bu fonksiyon Örnek 1.5.3 de bulunan fonksiyona eklendiğinde

$$\phi(x,y)=1+\frac{y}{2\pi}\ln\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}+\frac{x-1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x-1}-\frac{x+1}{\pi}Arc\tan\frac{y}{x+1}$$
buluruz.

Problemler.

1. Poisson integral formülünü kullanarak $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(x,0) = x, \quad -1 < x < 1$$

$$\phi(x,y) = 0, \qquad |x| > 1$$

sınır koşulları sağlansın.

2. Poisson integral formülünü kullanarak $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(t,0) = U(t) = 0, \quad t < 0$$

$$\phi(t,0) = U(t) = t, \quad 0 < t < 1$$

$$\phi(t,0) = U(t) = 0, \quad t > 1$$

sınır koşulları sağlansın.

3. Poisson integral formülünü kullanarak $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\phi(t,0) = U(t) = 0, \quad t < 0$$

$$\phi(t,0) = U(t) = t, \quad 0 < t < 1$$

$$\phi(t,0) = U(t) = 1, \quad t > 1$$

sınır koşulları sağlansın.

4. Poisson integral formülünü kullanarak $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde harmonik olan öyle bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu bulunuz ki

$$\varphi(t,0) = U(t) = 1, \quad t < 0$$

$$\varphi(t,0) = U(t) = t, \quad 0 < t < 1$$

$$\varphi(t,0) = U(t) = 0, \quad t > 1$$

sınır koşulları sağlansın.