2.3. Sınırı Üzerinde Yalıtılmış Bir Parça Olan Bölgelerdeki Sıcaklıklar

Bu kesimde sınırı C_1, C_2 ve C_3 gibi uç uca birleştirilmiş üç eğriden oluşan basit bağlantılı bir D bölgesinin içinde $T(x,y)$ kararlı durum sıcaklık fonksiyonunu bulma problemini inceleyeceğiz. Burada C_1 boyunca $T(x,y)=T_1$, C_2 boyunca $T(x,y)=T_2$ dir ve bölge C_3 boyunca yalıtılmıştır. C_3 boyunca ısı akışının sıfır olması

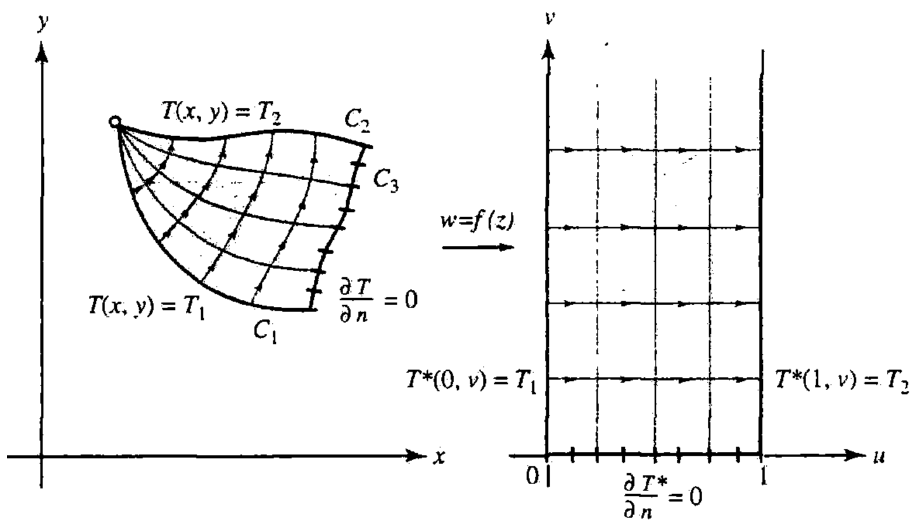
$$V(x,y)N(x,y) = -K\,N(x,y)\,grad\,T(x,y) = 0$$

olmasını gerektirir, burada $N(x,y)$, C_3 e diktir. Böylece ısı akışının yönü sınırın bu parçasına paralel olmalıdır. Başka bir deyişle, C_3 bir $S(x,y) = sabit$ ısı akış doğrusunun bir parçası olmalı ve $T(x,y) = sabit$ izotermallerini dik olarak kesmelidir.

Bu problemi, D den $G: 0 < u < 1$, $v > 0$ yarı-sonsuz şeridi üzerine bir

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

konform dönüşümü bularak çözebiliriz öyle ki C_1 eğrisinin görüntüsü $u=0$, $v>0$ ışınıdır, C_2 eğrisinin görüntüsü $u=1$, $v>0$ ile verilen ışınıdır ve termal olarak yalıtılmış C_3 eğrisi u ekseninin termal olarak yalıtılmış $0<u<1$ parçası üzerine dönüştürülür.



Şekil 16

G deki yeni problem $T^*(u,v)$ kararlı durum sıcaklık fonksiyonunu bulma problemidir öyle ki

$$T^*(0,v) = T_1 \quad , \quad v > 0$$
$$T^*(1,v) = T_2 \quad , \quad v > 0$$

sınır koşulları sağlanır. Sınırın bir parçasının yalıtılmış olma koşulu matematiksel olarak $T^*(u,v)$ nin normal türevinin sıfır olması ile ifade edilebilir. Yani,

$$\frac{\partial T^*}{\partial n} = T_v^*(u,0) = 0$$

dir, burada n, doğru parçasına dik bir koordinat ölçüsüdür. Kolayca görülür ki

$$T^*(u,v) = T_1 + (T_2 - T_1)u$$

fonksiyonu G bölgesi için aranan sıcaklık fonksiyonunun şartlarını sağlar. Dolayısıyla, D deki çözümü $w = f(z)$ den

$$T(x,y) = T_1 + (T_2 - T_1)u(x,y)$$

olarak buluruz. $T(x,y) = sabit$ izotermalleri ve onların $w = f(z)$ altındaki görüntüleri yukarıda Şekil 16 da gösterilmiştir.

Örnek 2.3.1. $D : \operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzlemi için $T(x,y)$ kararlı durum sıcaklığını bulunuz öyle ki

$$T(x,0) = 1 \ , \ \ x > 1$$
$$T(x,0) = -1 \ , \ x < -1$$
$$\frac{\partial T}{\partial n} = T_y(x,0) = 0 \ , \ \ -1 < x < 1$$

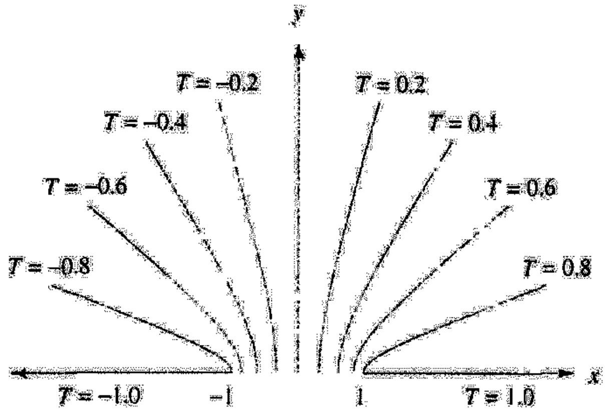
sınır koşulları sağlansın.

Çözüm. Örnek 0.2.4 den bilinmektedir ki $w = Arc\sin z$ dönüşümü D yi $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$ yarı-sonsuz şeridi üzerine dönüştürür, burada yeni problem $T^*(u,v)$ kararlı durum sıcaklığını bulmaktır öyle ki

$$T^*\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = 1 \qquad , \ \ v > 0$$
$$T^*\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = -1 \ , \ \ v > 0$$
$$\frac{\partial T^*}{\partial n} = T_v^*(u,0) = 0 \ , \ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$

sınır koşulları sağlanır. Örnek 1.2.1 in sonucunu kullanarak kolayca $T^*(u,v) = \frac{2}{\pi}u$ çözümünü bulabiliriz. Dolayısıyla D deki çözüm

$$T(x,y)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}(Arc\sin z)=\frac{2}{\pi}Arc\sin\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2}$$



Şekil 17

Burada $Arc\sin t$, $-\frac{\pi}{2}<Arc\sin t<\frac{\pi}{2}$ değerlerine sahip olan ters sinüs fonksiyondur. Bu durumda $T(x,y)$ sıcaklığı

$$T(x,0)=-1\quad,\quad x<-1$$
$$T(x,0)=1\quad,\quad x>1$$
$$T_y(x,0)=0\quad,\quad -1<x<1$$

sınır koşullarını sağlar.

Problemler.

1. $\{z=x+iy:\ 0<y<\pi\}$ yatay sonsuz şeridinde öyle bir $T(x,y)$ sıcaklığı bulunuz ki aşağıdaki sınır koşulları sağlansın.

$$\begin{array}{lcl} T(x,0)=50,\quad x>0 & & \dfrac{\partial T}{\partial n}=T_y(x,0)=0,\quad x<0 \\ T(x,\pi)=-50,\quad x>0 & \text{ve} & \dfrac{\partial T}{\partial n}=T_y(x,\pi)=0,\quad x<0 \end{array}.$$

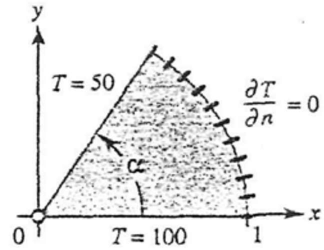
sınır koşulları sağlansın. (Yol gösterme: $w=e^z$ dönüşümünden yararlanınız.)

2. $\left\{z=re^{i\theta}:1<r<2,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$ bölgesinde öyle bir $T(x,y)$ sıcaklığı bulunuz ki aşağıdaki sınır koşulları sağlansın.

$$\begin{array}{lcl} T(x,y)=20,\ |z|=1,\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2} & & \dfrac{\partial T}{\partial n}=T_y(x,0)=0,\quad 1<x<2 \\ T(x,y)=50,\ |z|=2,\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2} & \text{ve} & \dfrac{\partial T}{\partial n}=T_x(0,y)=0,\quad 1<y<2 \end{array}.$$

3. $0<r<1,\ 0<Argz<\dfrac{\pi}{3}$ bölgesinde öyle bir $T(x,y)$ sıcaklık fonksiyonu bulunuz ki

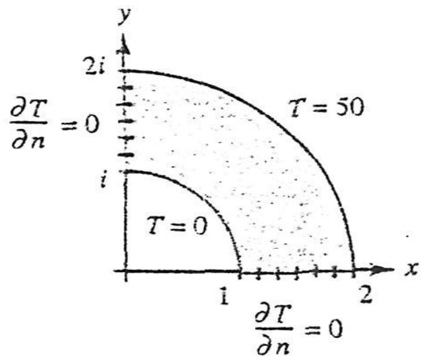
$$T(x,0)=100,\ \ 0<x<1, \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial T}{\partial n}=0\ ,\ \ z=e^{i\theta},0<\theta<\frac{\pi}{3}$$
$$T(x,y)=50,\ \ z=re^{i\frac{\pi}{3}},\ 0<r<1$$



sınır koşulları sağlansın.

4. $1<r<2,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ bölgesinde öyle bir $T(x,y)$ sıcaklık fonksiyonu bulunuz ki

$$T(x,y)=0,\ x+iy=z=e^{i\theta},\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\partial T}{\partial n}=T_y(x,0)=0,\ 1<x<2$$
$$\text{ve}$$
$$T(x,y)=50,\ \ x+iy=z=2e^{i\theta},\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\partial T}{\partial n}=T_x(0,y)=0,\ 1<y<2$$



sınır koşulları sağlansın.