2.4. İki Boyutlu Elektrostatik

Bir iki boyutlu elektrostatik alan, yüklü tellerin, tabakaların ve z-düzlemine dik silindirik iletkenlerin bir sistemi ile üretilir. Teller, tabakalar ve silindirler öyle uzun kabul edilir ki uç noktalardaki etkiler ihmal edilebilir. Bu kabul ile bir $E(x, y)$ elektrik alanını (x, y) noktasına yerleştirilmiş bir birimlik elektrik yüküne etki eden kuvvet olarak yorumlanabilir. Elektrostatik çalışmalarında $E(x, y)$ vektör alanının konservatif olarak elektrostatik potansiyel denilen bir $\phi(x, y)$ fonksiyonundan türetilebildiği bilinmekte ve bu,

$$E(x, y) = -grad\ \phi(x, y) = -\phi_x(x, y) - i\phi_y(x, y)$$

olarak ifade edilebilmektedir.

Eğer D bölgesi içinde yükün olmadığını ek olarak kabul edersek, bu durumda elektrostatik alanlar için Gauss kanunu gerektirir ki D de bulunan herhangi bir küçük dikdörtgen etrafında alınan $E(x, y)$ nin dış normal bileşeninin eğri integrali özdeş olarak sıfırdır. $\phi(x, y)$ yerine $T(x, y)$ alınarak kararlı durum sıcaklığı için benzer düşünce kullanılabilir. Görülür ki eğri integralinin değeri

$$-\left[\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y)\right]\Delta x\, \Delta y$$

dir ve bu sıfırdır, böylece $\phi(x, y)$ nin harmonik olduğu ortaya çıkar. $\psi(x, y)$, $\phi(x, y)$ nin harmonik eşleniği ise $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ kompleks potansiyeldir.

$\phi(x, y) = K_1$ eğrilerine eşpotansiyel eğrileri ve $\psi(x, y) = K_2$ eğrilerine de akı doğruları adı verilir. Eğer bir küçük test yüküne $E(x, y)$ alanının etkisi altında hareket etme izni verilirse, bu durumda bu yük bir akı doğrusu boyunca gezecektir. $\phi(x, y)$ potansiyel fonksiyonu için sınır değer problemleri matematiksel olarak kararlı durum ısı akışındaki ile aynıdır ve bunlar harmonik fonksiyonu $\phi(x, y)$ olan Dirichlet probleminin uygulamasıdır.

Örnek 2.4.1. İki paralel iletken düzlemi göz önüne alalım öyle ki bunlar z düzlemine dik ve $x = a$ ile $x = b$ doğrularından geçsinler ve sırasıyla U_1 ve U_2 potansiyellerde tutulmuş olsunlar. Bu durumda Örnek 1.2.1 den elektrik potansiyeli

$$\phi(x, y) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{b - a}(x - a)$$

biçimindedir.

Örnek 2.4.2. $r = a$ ve $r = b$ sonsuz silindirleri arasındaki bölgedeki, sırasıyla U_1 ve U_2 potansiyellerinde tutulan, $\phi(x, y)$ elektrik potansiyelini bulunuz.

Çözüm. Örnek 0.2.5 de gösterildiği gibi $w = \log z = \ln|z| + i \arg z$ fonksiyonu $r = a$ ve $r = b$ çemberleri arasındaki halka bölgeyi w-düzlemindeki $\ln a < u < \ln b$ sonsuz şeridi üzerine dönüştürür. Sonsuz şeritteki $\phi(u, v)$ potansiyeli her v için

$$\Phi(\ln a, v) = U_1 \quad \text{ve} \quad \Phi(\ln b, v) = U_2$$

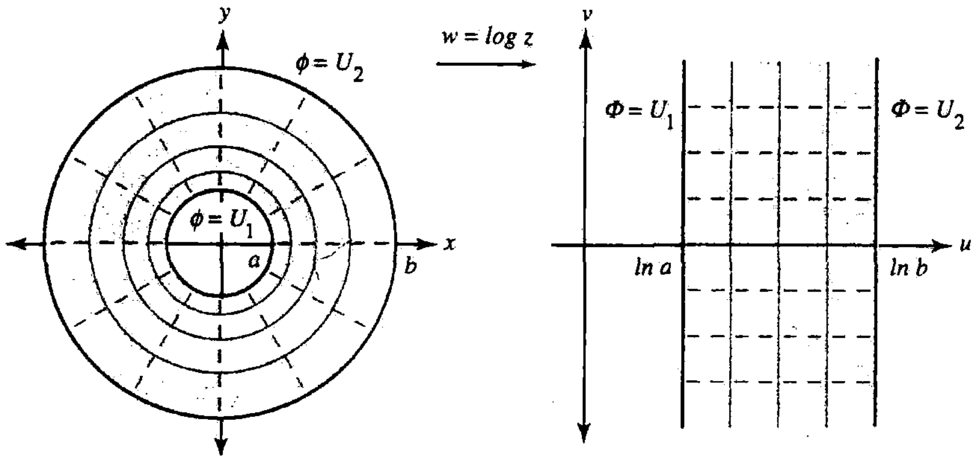
sınır değerlerine sahiptir. Yukarıdaki Örnek 2.4.1 i kullanırsak

$$\Phi(u,v) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{\ln b - \ln a}(u - \ln a)$$

elektrik potansiyelini elde ederiz. $u = \ln|z|$ olduğundan

$$\phi(x,y) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{\ln b - \ln a}(\ln|z| - \ln a)$$

dir. $\phi(x,y) = sabit$ eşpotansiyelleri orijin merkezli eşmerkezli çemberlerdir ve akı doğruları orijinden çıkan ışın parçalarıdır. Eğer $U_2 < U_1$ ise, bu durum aşağıda Şekil 18 de gösterilmiştir.



Şekil 18

Örnek 2.4.3. z-düzlemine dik ve $x < -1, y = 0$ ve $x > 1, y = 0$ ışınlarından geçen yüklü iki yarı düzlem tarafından üretilen $\phi(x,y)$ elektrik potansiyelini bulunuz. Burada düzlemler sabit

$$\phi(x,0) = -300 \quad , \quad x < -1$$
$$\phi(x,0) = 300 \quad , \quad x > 1$$

potansiyellerinde tutulmaktadır.

Çözüm. Örnek 0.2.4 de gösterildiği gibi $w = Arc\sin z$ fonksiyonu $x < -1, y = 0$ ve $x > 1, y = 0$ ışınları boyunca kesilmiş z-düzleminden $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ düşey şeridi üzerine bir bire-bir konform dönüşümdür. Şimdi şerit üzerindeki yeni sınır değer problemi "$\forall\, v$ için

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = -300 \quad \text{ve} \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = 300$$

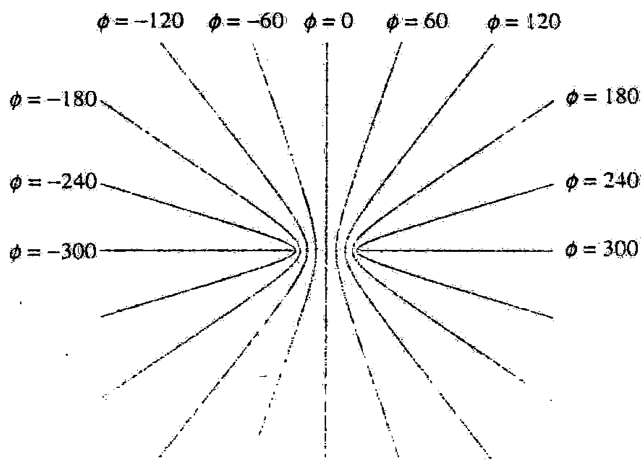
sınır değerlerine sahip bir $\Phi(u,v)$ potansiyeli bulunuz" biçiminde olacaktır. Örnek 1.2.1 den

$$\Phi(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = -300 + \frac{300-(-300)}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\left(\mathrm{u}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -300 + \frac{600}{\pi}\mathrm{u} + \frac{600}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{600}{\pi}\mathrm{u} = \frac{600}{\pi}\operatorname{Re} \mathrm{w}$$

dir. z -düzlemindeki çözüm

$$\phi(x,y) = \frac{600}{\pi}\operatorname{Re}(Arc\sin z)$$
$$= \frac{600}{\pi} Arc\sin\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2}$$

dir. Eşpotansiyellerin bir kısmı Şekil 19 da gösterilmiştir.



Şekil 19

Örnek 2.4.4. $D:|z|<1$ diskinde

$$\phi(x,y) = 80 \quad , \quad z = x+iy \in C_1 = \left\{z = e^{i\theta} : \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$
$$\phi(x,y) = 0 \quad , \quad z = x+iy \in C_2 = \left\{z = e^{i\theta} : \ \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right\}$$

sınır koşullarını sağlayan $\phi(x,y)$ elektrik potansiyelini bulunuz.

Çözüm. $w = S(z) = \dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1}$ dönüşümü D den $\operatorname{Im} w > 0$ üst yarı-düzlemi üzerine bir birebir konform dönüşümdür öyle ki C_1 negatif u-ekseni üzerine ve C_2 de pozitif u-ekseni üzerine dönüştürülür. Üst yarı-düzlemdeki $\Phi(u,v)$ potansiyeli yeni

$$\Phi(u,0) = 80 \quad , \quad u < 0$$
$$\Phi(u,0) = 0 \quad , \quad u > 0$$

sınır koşullarını sağlar ve

$$\Phi(u,v) = \frac{80}{\pi} Argw = \frac{80}{\pi} Arc\tan\frac{v}{u} \qquad (2.1)$$

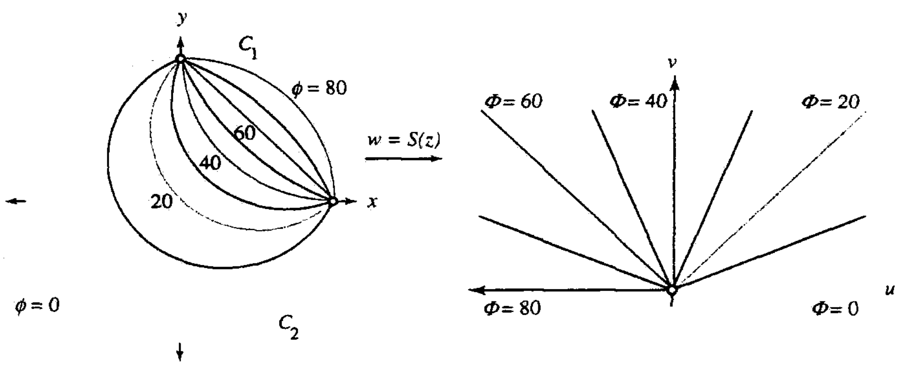
ile verilir. Bir doğrudan hesaplama ile

$$u + iv = S(z) = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 + i(1 - x^2 - y^2)}{(x-1)^2 + y^2}$$

olduğu görülür. (2.1) denkleminden, istenen çözüm

$$\phi(x,y) = \frac{80}{\pi} Arc\tan\frac{1 - x^2 - y^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}$$

biçimindedir. Üst yarı-düzlemdeki $\Phi(u,v) = \alpha$ düzey eğrisi orijinden çıkan bir ışındır ve birim diskteki $\phi(x,y) = \alpha$ ön görüntüsü 1 ve i noktalarından geçen bir çember yayıdır. Bir kısım düzey eğrileri Şekil 20 de gösterilmiştir.



Şekil 20

Problemler.

1. İç içe yerleştirilmiş $r = 1$ ve $r = 2$ silindirleri arasında öyle bir $\phi(x,y)$ elektrostatik potansiyelini bulunuz ki

$\phi(x,y)=100\,,\ \ |z|=1$

$\phi(x,y)=200\,,\ \ |z|=2$

sınır koşulları sağlansın.

2. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ sonsuz şeridinde öyle bir $\phi(x,y)$ elektrostatik potansiyelini bulunuz ki

$\phi(0,y)=100\,,\quad y>0\,;$

$\phi(\frac{\pi}{2},y)=0\,,\quad \forall\, y\in R\,;$

$\phi(0,y)=-100\,,\ \ y<0$

sınır koşulları sağlansın. (Yol gösterme $w=\sin z$ dönüşümünü kullanınız.)

3. $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı düzleminde öyle bir $\phi(x,y)$ elektrostatik potansiyelini bulunuz ki

$\varphi(x,0)=100\,,\quad x>1$

$\varphi(x,0)=10\,,\quad -1<x<1$

$\varphi(x,0)=-100\,,\quad x<-1$

sınır koşulları sağlansın.

4. $\operatorname{Im} z>0$ üst yarı düzleminin $|z|=1$ çemberinin dışında kalan kısmında (yani; $\operatorname{Im} z>0$, $|z|>1$) tanımlı öyle bir $\phi(x,y)$ elektrostatik potansiyelini bulunuz ki

$\phi(x,y)=100\,,\ \ |z|=1, 0<\arg z<\pi$

$\phi(x,0)=0\,,\quad |x|>1$

sınır koşulları sağlansın.

5. $D=\{z:|z|<5\}\cap\{z:|z-2|>2\}$ bölgesinin $w=\dfrac{z-10}{2z-5}$ dönüşümü altında $\{w:1<|w|<2\}$ bölgesine dönüştüğü bilinmektedir. Buna göre *D* bölgesinde öyle bir $\phi(x,y)$ elektrostatik potansiyelini bulunuz ki

$\phi(x,y)=100\,,\ \ |z|=5$

$\phi(x,y)=200\,,\quad |z-2|=2$

sınır koşulları sağlansın.