2.5. İki Boyutlu Sıvı Akışı

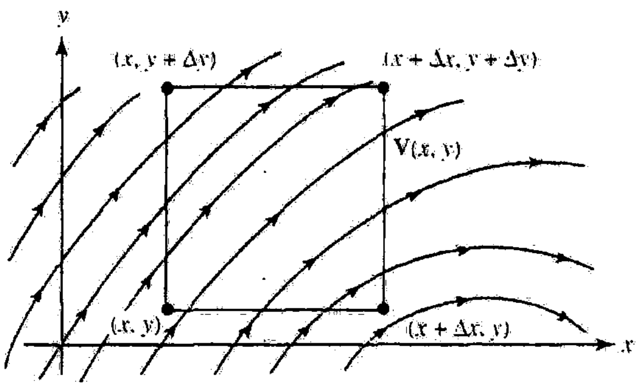
Kabul edelim ki kompleks düzlem üzerinde bir sıvı akmaktadır ve $z = x + iy$ noktasında bu sıvının hızı

$$V(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) \qquad (2.2)$$

hız vektörü ile verilmektedir. Hızın zamandan bağımsız ve $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ bileşenlerinin sürekli kısmi türevlere sahip olmasını isteriz. (2.2) denklemindeki vektör alanının divergensi

$$divV(x, y) = p_x(x, y) + q_y(x, y)$$

ile verilir ve $z = x + iy$ noktası civarında uzaklaşan hız alanının büyüklüğünün ölçüsüdür. Biz sadece divergensi sıfır olan sıvı akışlarını göz önüne alacağız. Bu koşul herhangi bir basit kapalı çevre boyunca net akışın özdeş olarak sıfır olması biçiminde daha kesin olarak karakterize edilir.



Şekil 21

Eğer Şekil 21 de gösterilen küçük dikdörtgenin dışındaki akışı göz önüne alırsak, bu durumda dışarı doğru akış oranı $V(x, y)$ nin dikdörtgenin kenarlarında elde edilmiş olan dış normal bileşenin eğri integraline eşittir. Dış normal bileşen alt kenar üzerinde $-q$, sağ kenar üzerinde p, üst kenar üzerinde q ve sol kenar üzerinde $-p$ ile verilir. Sonuçlanan net akış integre edilip sıfıra eşitlendiğinde

$$\int_{y}^{y+\Delta y} [p(x + \Delta x, t) - p(x, t)]dt - \int_{x}^{x+\Delta x} [q(t, y + \Delta y) - q(t, y)]dt = 0$$

sağlanır. Hem p, hem de q sürekli diferensiyellenebilirdir. Böylece ortalama değer teoremini kullanırsak

$$\begin{aligned} p(x + \Delta x, t) - p(x, t) &= p_x(x_1, t)\Delta x \\ q(t, y + \Delta y) - q(t, y) &= q_y(t, y_2)\Delta y \end{aligned} \qquad (2.3)$$

elde ederiz, burada $x < x_1 < x + \Delta x$ ve $y < y_2 < y + \Delta y$ dir. (2.3) denklemindeki ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazar ve her iki tarafı $\Delta x \Delta y$ ile bölersek

$$\frac{1}{\Delta y} \int_{y}^{y+\Delta y} p_x(x_1, t)dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} q_y(t, y_2)dt = 0$$

buluruz. Bu denklemi ve integraller için ortalama değer teoremini kullanırsak

$$p_x(x_1, y_1) + q_y(x_2, y_2) = 0$$

elde ederiz, burada $y < y_1 < y + \Delta y$ ve $x < x_2 < x + \Delta x$ dir. Bu denklemde $\Delta x \to 0$ ve $\Delta y \to 0$ alınırsa

$$p_x(x, y) + q_y(x, y) = 0$$

olur ki buna süreklilik denklemi denir. $\mathrm{V}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{p}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \mathrm{iq}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ vektör alanının curl ü

$$|\, curl\, V(x, y)| = q_x(x, y) - p_y(x, y)$$

büyüklüğüne sahiptir ve bir nokta civarında vektör alanının nasıl döndüğünün bir göstergesidir. (x, y) noktasında bir "sıvı elementi" nin aniden donduğunu ve daha sonra yavaş yavaş sıvılaştığını düşünelim. Sıvı elementi

$$\frac{1}{2} q_y(x, y) - \frac{1}{2} p_x(x, y) = \frac{1}{2} |\, curl\, V(x, y)|$$

ile verilen bir açısal hız ile dönecektir.

Biz sadece curl ü sıfır olan sıvı akışları ile ilgileneceğiz. Bu tür sıvı akışlarına irrotasyonel sıvı akışı denir. Bu koşul herhangi bir basit kapalı çevre boyunca $V(x, y)$ nin teğetsel bileşeninin eğri integralinin özdeş olarak sıfır olması biçiminde daha kesin olarak karakterize edilir. Eğer yukarıdaki Şekil 23 deki dikdörtgeni göz önüne alırsak teğetsel bileşen alt kenar üzerinde p, sağ kenar üzerinde q, üst kenar üzerinde $-p$ ve sol kenar üzerinde $-q$ ile verilir. Sonuçlanan sirkülasyon integrali hesaplanıp sıfıra eşitlendiğinde

$$\int_{y}^{y+\Delta y} [q(x + \Delta x, t) - q(x, t)]dt + \int_{x}^{x+\Delta x} [p(t, y + \Delta y) - p(t, y)]dt = 0$$

sağlanır. Önceki gibi, ortalama değer teoremini uygular ve her iki tarafı $\Delta x \Delta y$ ile bölersek

$$\frac{1}{\Delta y} \int_{y}^{y+\Delta y} q_x(x_1, t)dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} p_y(t, y_2)dt = 0$$

denklemini buluruz. $q_x(x_1, y_1) - p_y(x_2, y_2) = 0$ eşitliğini elde etmek için bu türden denklemli integraller için ortalama değeri kullanabiliriz. $\Delta x \to 0$ ve $\Delta y \to 0$ alındığında $q_x(x, y) - p_y(x, y) = 0$ sağlanır. $p_x(x, y) + q_y(x, y) = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa $f(z) = p(x, y) - iq(x, y)$ fonksiyonunun Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığı ve bir analitik fonksiyon olduğu görülür. Eğer $f(z)$ nin antitürevini $F(z)$ ile gösterirsek, bu durumda

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

olur ki bu, akışın kompleks potansiyelidir ve

$$\overline{F'(z)} = \phi_x(x, y) - i\psi_x(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) = V(x, y)$$

özelliğine sahiptir. $\phi_x = p$ ve $\phi_y = q$ olduğundan

$$grad\phi(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) = V(x, y)$$

dir, böylece $\phi(x, y)$ akış için hız potansiyelidir ve $\phi(x, y) = K_1$ eğrilerine eşpotansiyeller denir. $\psi(x, y)$ fonksiyonuna akıntı fonksiyonu denir. $\psi(x, y) = K_2$ eğrilerine akıntı doğruları denir ve sıvı partiküllerinin eğrilerini tanımlar. Bu sonucu açıklamak için, $\psi(x, y) = K$ nın türevini alırız ve bir teğet vektörün eğiminin $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\psi_x(x, y)}{\psi_y(x, y)}$ ile verildiğini buluruz. $\psi_y = \phi_x$ olduğunu da göz önüne alırsak eğriye teğet olan vektörü

$$T = \phi_x(x, y) - i\psi_x(x, y) = p(x, y) + iq(x, y) = V(x, y)$$

olarak buluruz. Bu incelemelerde dikkati çeken fikir "Eğer $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ bir analitik fonksiyon ise, bu durumda $\{\psi(x, y) = K_2\}$ eğrilerinin ailesi bir sıvı akışının akıntı doğrularını gösterir" dir.

Bir ideal sıvı akışı için sınır koşulu V nin sıvıyı içeren sınır eğrisine paralel olmasıdır (sıvı kabın duvarlarına paralel olarak akar). Başka bir deyişle, eğer $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ denklemi akış için kompleks potansiyel ise bu durumda sınır eğrisi bir K sabiti için $\psi(x, y) = K$ ile verilmelidir. Yani, sınır eğrisi bir akıntı doğrusu olmalıdır.

Teorem 2.5.1. (Akışın değişmezliği) $F_1(w) = \phi(u, v) + i\psi(u, v)$ w-düzlemindeki bir G bölgesinde bir sıvı akışı için kompleks potansiyeli göstersin, burada hız

$$V_1(u, v) = \overline{F_1'(w)}$$

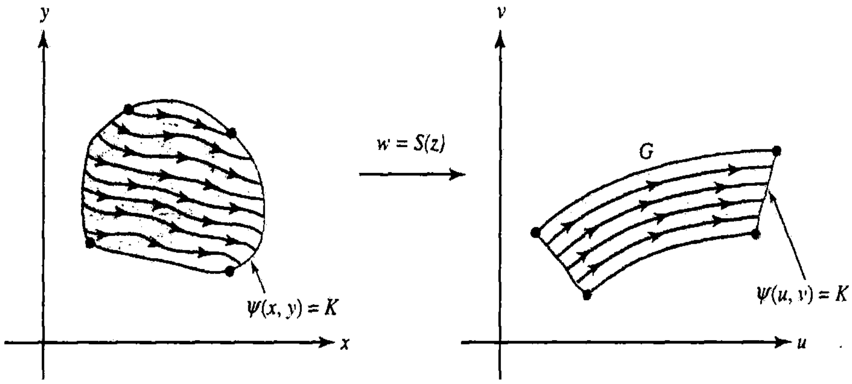
dir. Eğer $w = S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu z-düzlemindeki bir D bölgesinden G üzerine bir birebir konform dönüşüm ise bu durumda

$$F_2(z) = F_1(S(z)) = \Phi[u(x, y), v(x, y)] + i\Psi[u(x, y), v(x, y)]$$

bileşke fonksiyonu D deki bir sıvı akışı için kompleks potansiyeldir, burada hız

$$V_2(u,v) = \overline{F_2'(z)}$$

dir. Bu durum Şekil 22 de gösterilmektedir.



Şekil 22

İspat. $F_1(w)$ nin analitik olduğu açıktır. Analitik fonksiyonların bileşkesi de analitik olduğundan, $F_2(z)$ D deki bir sıvı akışı için istenen kompleks potansiyeldir.

●

$\phi(x,y) = \Phi[u(x,y), v(x,y)]$ ve $\psi(x,y) = \Psi[u(x,y), v(x,y)]$ fonksiyonları D deki akış için sırasıyla, yeni hız potansiyeli ve akıntı fonksiyonudur.

z-düzlemindeki bir $\psi(x,y) = K$ akıntı doğrusu veya doğal sınır eğrisi $w = S(z)$ dönüşümü ile w-düzleminde bir $\Psi(u,v) = K$ akıntı doğrusu veya doğal sınır eğrisi üzerine dönüştürülür. z-düzlemindeki bir D bölgesi içindeki bir akışı bulmak için bir yöntem D w-düzlemindeki akışı bilinen bir G bölgesi üzerine konform olarak dönüştürmektedir.

Bir düzgün ρ yoğunluklu ideal sıvı için $p(x,y)$ sıvı basıncı ve $|V(x,y)|$ hızı Bernoulli denkleminin aşağıdaki özel durumu ile ilgilidir.

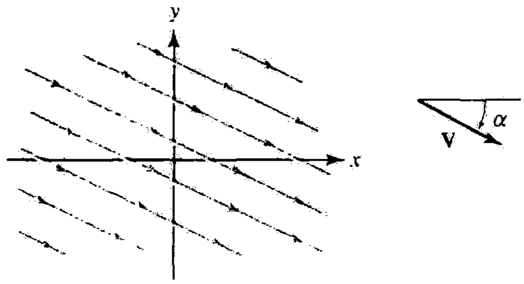
$$\frac{p(x,y)}{\rho} + \frac{1}{2}|V(x,y)| = sabit$$

Hız en düşük olduğunda basıncın en büyük olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 2.5.2. $F(z) = (a+ib)z$ kompleks potansiyeli sırasıyla $\phi(x,y) = ax - by$ ve $\psi(x,y) = bx + ay$ hız potansiyeli ve akıntı fonksiyonuna sahiptir ve kompleks düzlemin tamamında bir

$$V(x,y) = \overline{F'(z)} = a - ib$$

düzgün paralel hıza sahiptir. Akıntı doğruları $bx + ay = sabit$ denklemi ile verilen paralel doğrulardır ve Şekil 23 de gösterildiği gibi bir $\alpha = -Arc\tan\left(\frac{b}{a}\right)$ açısı ile eğimlidir.

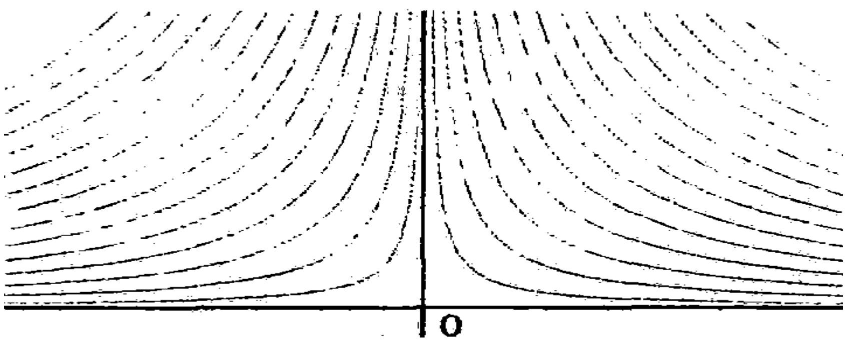


Şekil 23

Örnek 2.5.3. A bir pozitif reel sayı olmak üzere $F(z) = \frac{A}{2}z^2$ kompleks potansiyelini göz önüne alalım. Hız potansiyeli ve akıntı fonksiyonu sırasıyla

$$\phi(x,y) = \frac{A}{2}(x^2 - y^2) \qquad \text{ve} \qquad \psi(x,y) = Axy$$

ile verilir. $\psi(x,y) = sabit$ akıntı doğruları koordinat eksenleri boyunca asimptotlu bir hiperboller ailesi oluşturur. $V = A\bar{z}$ hız vektörü $\operatorname{Im} z > 0$ üst yarı-düzleminde sıvı akıntı doğruları boyunca aşağı doğru akar ve Şekil 24 de gösterilen biçimde x ekseni boyunca dışarı doğru bir duvar karşısındaymış gibi yayılır.



Şekil 24

Örnek 2.5.4. Kompleks düzlemde soldan sağa doğru $|z| = 1$ birim çemberi etrafında bir ideal sıvı akışı için kompleks potansiyeli bulunuz.

Çözüm. $w = S(z) = z + \frac{1}{z}$ konform dönüşümünün $D = \{z : |z| < 1\}$ bölgesini $-2 \le u \le 2$, $v = 0$ doğru parçası boyunca kesilmiş w-düzlemi üzerine birebir ve üzerine olarak dönüştürmesi gerçeğini kullanırız. w-düzleminde bu kesite paralel bir düzgün yatay akış için kompleks potansiyel $F_1(w) = Aw$ dir, burada A bir pozitif reel sayıdır. w-düzlemindeki akış için akıntı fonksiyonu $\Psi(u,v) = Av$ dir öyle ki $\Psi(u,v) = 0$ akıntı doğrusu boyunca kesit vardır.

$F_2(z) = F_1(S(z))$ bileşke fonksiyonu D bölgesindeki sıvı akışını belirler, burada kompleks potansiyel $A > 0$ olmak üzere $F_2(z) = A\left(z + \frac{1}{z}\right)$ dir. $F_2(z)$ yi ifade etmek için kutupsal koordinatları kullanabiliriz.

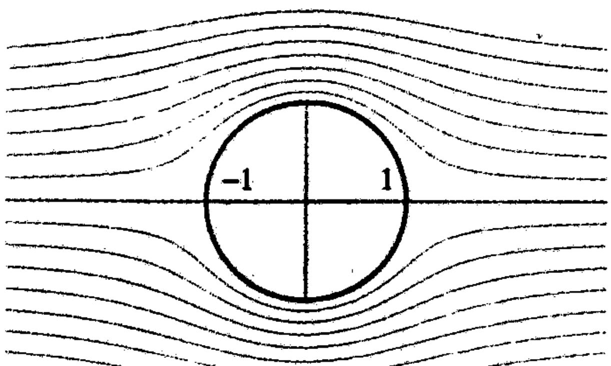
$$F_2(z) = F_2\left(re^{i\theta}\right) = A\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + iA\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

dır. $\psi(r,\theta) = A\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$ akıntı doğrusu x ekseni boyunca

$$r > 1 \;\;,\;\; \theta = 0 \quad \text{ve} \quad r > 1 \;\;,\;\; \theta = \pi$$

ışınlarından ve $r - \frac{1}{r} = 0$ eğrisinden, ki bu $r = 1$ birim çemberidir, oluşur. Böylece birim çember sıvı akışı için bir sınır eğrisi olarak göz önüne alınabilir.

$F_2(z) = A\left(z + \frac{1}{z}\right) \approx Az$ yaklaşımı z nin büyük değerleri için geçerlidir. Böylece bu akış ile orijinden uzak noktalarda $|V| = A$ hızına sahip bir düzgün yatay akışı yaklaştırabiliriz. $\psi(x,y) = sabit$ akıntı doğruları ve bunların $w = S(z) = z + \frac{1}{z}$ dönüşümü altında $\Psi(u,v) = sabit.u$ görüntüleri Şekil 25 de gösterilmiştir.



Şekil 25