3.1 The Fourier Transform

Bu kesimde reel değişkenli ve reel değerli bir $U(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü inceleyeceğiz. Eğer $U(t)$ reel değerli, 2π periyotlu, parçalı sürekli bir fonksiyon ve $U'(t)$ de mevcut ve parçalı sürekli ise bu durumda $U(t)$ nin $U(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\text{int}}$ kompleks Fourier seri açılımına sahip olduğu bilinmektedir, burada her n için $\{c_n\}$ katsayıları kompleks sayılardır ve $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(t)e^{-\text{int}}dt$ dir.

Eğer $U(t)$ ve $U'(t)$ $2L$ periyotlu, parçalı sürekli fonksiyonlar ise bu durumda $U(t)$ $U(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nt/L}$ Fourier seri gösterimine sahiptir, burada her n için $\{c_n\}$ katsayıları kompleks sayılardır ve $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} U(t)e^{-i\pi nt/L}dt$ dir.

Periyodik olmayan bir $U(t)$ fonksiyonu için bir Fourier serisine benzer gösterim $-L<t<L$ için $U(t)$ nin Fourier serisi elde edildikten sonra $L\to\infty$ iken limit alınarak bulunur. Bu sonuç $U(t)$ nin Fourier dönüşümü olarak bilinir. $U(t)$ periyodik olmayan bir fonksiyon olsun. $2L$ periyotlu $U_L(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım öyle ki

$U_L(t)=\begin{cases} U(t), & -L<t<L \\ U_L(t+2L), \forall t \end{cases}$ olsun. Bu durumda $U_L(t)$ fonksiyonunun Fourier seri gösterimi

$U_L(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nt/L}$ biçimindedir. $w_n = \frac{\pi n}{L}$ sayısına frekans (sıklık) adı verilir.

Theorem 3.1.1. (Fourier Dönüşümü). Let $U(t)$ ve $U'(t)$ parçalı sürekli fonksiyonlar ve bir pozitif M sabiti için $\int_{-\infty}^{\infty} |U(t)|dt < M$ olsun. $U(t)$ nin $F(w)$ Fourier dönüşümü

$$F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-iwt}dt$$

olarak tanımlanır. Süreklilik noktalarında $U(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$ integral gösterimine sahiptir ve eğer $t=a$ da U süreksiz ise bu durumda integral $\frac{U(a^-)+U(a^+)}{2}$ sayısına yakınsar. U yu F ye dönüştüren bu dönüşüm $\mathbb{F}(U(t))=F(w)$ ile gösterilir.

İspat. $w_n = \frac{\pi n}{L}$ olmak üzere $\Delta w_n = w_{n+1}-w_n = \frac{\pi}{L}$ ve $\frac{1}{2L}=\frac{1}{2\pi}\Delta w_n$ diyelim. Bu durumda

$U_L(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nt/L} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} U(t)e^{-iw_nt}dt\right]e^{iw_nt} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} U(t)e^{-iw_nt}dt\right]e^{iw_nt}\Delta w_n$ olur. Eğer $F_L(w)$ fonksiyonunu $F_L(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} U(t)e^{-iwt}dt$ ile tanımlarsak bu durumda

$$U_L(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(w_n)e^{iw_nt}\Delta w_n \qquad (*)$$

yazabiliriz. Şimdi L büyüdükçe $F_L(w_n)$ $F_L(w)$ ye yaklaşır ve Δw_n sıfıra gider. Bu durumda (*) denkleminin sağ tarafın bir integral olarak bakabiliriz ve böylece $U(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$ integral gösterimini elde ederiz.

Fourier dönüşümünün bazı önemli özellikleri:

1. $\mathbb{F}(aU_1(t)+bU_2(t)) = a\mathbb{F}(U_1(t))+b\mathbb{F}(U_2(t))$ (lineerlik özelliği).

2. $\mathbb{F}(U(t)) = F(w)$ ise bu durumda $\mathbb{F}(F(t)) = \frac{1}{2\pi}U(-w)$ (simetri özelliği).

3. $\mathbb{F}(U(t-t_0)) = e^{-it_0w}F(w)$ ve $\mathbb{F}(e^{-it_0w}U(t)) = F(w-w_0)$.

4. $\frac{d^nF(w)}{dw^n} = \mathbb{F}\left((-it)^nU(t)\right)$.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{F}(e^{-|t|}) = \frac{1}{\pi+(1+w^2)}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-iwt}dt$ denkleminden

$$F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-iwt}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-iw)t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{(-1-iw)t}dt$$

$$= \lim_{R_1\to-\infty} \frac{1}{2\pi(1-iw)}e^{(1-iw)t}\Big|_{R_1}^{0} + \lim_{R_2\to\infty} \frac{1}{2\pi(-1-iw)}e^{(-1-iw)t}\Big|_{0}^{R_2}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-iw)} + \frac{1}{2\pi(1+iw)} = \frac{1}{\pi(1+w^2)}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.3. $\mathbb{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{1}{2}e^{-|w|}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Yukarıdaki örnekten ve simetri özelliğinden

$\mathbb{F}\left(\frac{1}{\pi(1+t^2)}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{-|-w|} = \frac{1}{2\pi}e^{-|w|}$ buluruz. Lineerlik özelliğinden $\mathbb{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{1}{2}e^{-|w|}$ elde edilir.

II. yol. $U(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{(t-i)(t+i)}$ fonksiyonu $t = \pm i$ kutup noktaları dışında analitiktir. Fourier fönüşümünü bulmak için rezidü teorisini kullanacağız: $F(w) = \frac{1}{2\pi}\, p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iwt}}{1+t^2}dt.$

Eğer $w<0$ ise üst yarı düzlemde i noktasını içine alan yarım çember ve reel eksen üzerindeki çapından oluşan çevre üzerinde integralin değeri

$F(w) = \frac{1}{2\pi}2\pi i\, Res\left[\frac{e^{-iwt}}{1+t^2};i\right] = i\frac{e^w}{2i} = \frac{e^w}{2}$ dir.

Benzer şekilde, eğer $w \geq 0$ ise alt yarı düzlemde $-i$ noktasını içine alan yarım çember ve reel eksen üzerindeki çapından oluşan çevre üzerinde integralin değeri

$F(w) = \frac{1}{2\pi}(-2\pi i)\, Res\left[\frac{e^{-iwt}}{1+t^2};-i\right] = -i\frac{e^{-w}}{-2i} = \frac{e^{-w}}{2}$ bulunur.

Bu durumda $\mathbb{F}\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{-|w|}$ elde ederiz.

Problemler.

1. $U(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ fonksiyonu için $\mathbb{F}(U(t))$ Fourier dönüşümünü bulunuz.
2. $U(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le \pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$ fonksiyonu için $\mathbb{F}(U(t))=\dfrac{i\sin \pi w}{\pi(1-w^2)}$ olduğunu gösteriniz.
3. $U(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ fonksiyonu için $\mathbb{F}(U(t))$ Fourier dönüşümünü bulunuz.
4. $\mathbb{F}\left(e^{-t^2/2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-w^2/2}$ olduğunu gösteriniz. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}$ olduğunu göz önüne alınız.