3.3 z-Dönüşümü

Bilindiği gibi, fonksiyonların çeşitli ailelerine dönüşümlerin uygulanması çoğu kez belirli hesaplama avantajları getirmektedir. Bir aralık üzerinde sürekli veya periyodik olan fonksiyonlar için Fourier serilerini kullanırız; eğer aralık yarı-sonsuz ise Laplace dönüşümünü kullanırız; aralık tüm reel sayılar olduğunda Fourier dönüşümü kullanılır.

Pratikte diskret verilere sahip fonksiyonlarla sıkça karşılaşılır. Sayıların bir diskret dizisi $a(n)$ ile gösterelim; n nin tamsayı olduğunu ve $a(n)$ lerin kompleks sayı olabileceğini kabul ederiz. Örneğin $f(x)=2^{-|x|}$ fonksiyonunun $x=n$ tamsayılarındaki bazı değerleri: $a(0)=1$ olmak üzere $\ldots,\frac{1}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\ldots$ biçimindedir. $f(x)=\cos\pi x$ in bazı değerleri $a(0)=1$ olmak üzere $\ldots,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,\ldots$ biçimindedir.

$a(n)$ dizisinin $z-$dönüşümü

$$A(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)z^{-n}=\ldots+a(-2)z^{2}+a(-1)z+a(0)+a(1)z^{-1}+a(2)z^{-2}+\ldots$$

serisinin yakınsak olduğu tüm noktalardaki toplamı olarak tanımlanır.

Örnek 3.3.1. $a(n)=2^{-|n|}$ dizisi için $z-$dönüşümü:

$$A(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0} 2^{n}z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}$$

biçimindedir. İlk seri $|z|<2$ için $\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$ ye yakınsar. İkinci seri

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}=\frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}}=\frac{1}{2z-1}$$

e yakınsar. Böylece $\frac{1}{2}<|z|<2$ yakınsaklık halkasında $a(n)=2^{-|n|}$ dizisinin $z-$dönüşümü

$$A(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{2z-1}=\frac{-3z}{2(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

analitik fonksiyonudur. Açık olarak $z-$dönüşümü $A(z)$ nin bu halkadaki Laurent serisidir.

Örnek 3.3.2. $a(n)=(-1)^{n}$ dizisnin $z-$dönüşümü

$$A(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n}z^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n}}$$

biçimindedir; Birinci seri $|z|<1$ de yakınsaktır. İkincisi ise sadece $|z|>1$ de yakınsaktır. Bu bölgeler ayrık olduğundan $z-$dönüşümü hiçbir yerde yakınsak değildir.

Yakınsaklık teorisinden bilinir ki Laurent serisinin pozitif indisli kısmı $|z| > \limsup \sqrt[n]{|a(n)|}$ için ve negatif indisli kısım da $|z| < \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a(-n)|}}$ için yakınsaktır. Böylece $z-$dönüşümü

$\limsup \sqrt[n]{|a(n)|} < |z| < \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a(-n)|}}$ halkasında bulunan noktalarda iyi tanımlıdır.

Bir analitik fonksiyon birden fazla dizinin $z-$dönüşümü olabilir, çünkü onun Laurent seri gösterimi (yakınsaklık bölgesine bağlı olarak) bir tek değildir. Örneğin $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ fonksiyonu aşağıdaki dizilerin herbirinin $z-$dönüşümüdür:

$$|z|<1 \text{ için } \ a(n)=\begin{cases} 1-2^{n-1}, & n\le 0 \\ 0, & n>0 \end{cases}$$

$$1<|z|<2 \text{ için } \ a(n)=\begin{cases} -2^{n-1}, & n\le 0 \\ -1, & n>0 \end{cases}$$

$$|z|>2 \text{ için } \ a(n)=\begin{cases} 0, & n<1 \\ 2^{n-1}-1, & n\ge 1 \end{cases}.$$

Problemler.

1. $a(n)=\begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases}$ dizisinin $z-$dönüşümünün $A(z)=1$ olduğunu gösteriniz.
2. $a(n)=1$ dizisinin $z-$dönüşümünün $A(z)=\dfrac{z}{z-1}$ olduğunu gösteriniz.
3. $a(n)=n$ dizisinin $z-$dönüşümünün $A(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$ olduğunu gösteriniz.
4. $a(n)=\alpha^n$ dizisinin $z-$dönüşümünün $A(z)=\dfrac{z}{z-\alpha}$ olduğunu gösteriniz.