KONU 4: ULAŞTIRMA MODELLERİ – II

En İyi Çözüm Bulma Yöntemleri

MODİ Testi

Ulaştırma modelinde mevcut bir temel uygun çözümün en iyi çözüm olup olmadığını sınamak için farklı yöntemler geliştirilmiştir. MODİ (Modified Distribution) testi, yapılan dağıtımın/yüklemenin tahsislerinin optimal olup olmadığını belirler. Doğrusal programlamadaki dual kavram yaklaşımından hareket eden ve ulaştırma matrisi kullanan bir testtir. Dengelenmiş bir ulaştırma probleminde ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) matematiksel model,

$$\begin{aligned} &\min Z = \sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij} \\ &\sum_j X_{ij} = a_i \quad (\textit{kaynak / merkez kısıtı}) \\ &\sum_i X_{ij} = b_j \quad (\textit{bölge / hedef kısıtı}) \\ &X_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı primal model olarak kabul edilsin. u_i , $i = 1,2,...,m$ ler merkezlere ve v_j , $j = 1,2,...,n$ ler bölgelere karşılık gelen değişkenler olsun. Bu primalin duali,

$$\begin{aligned} &\max Z = \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j \\ &u_i + v_j \leq c_{ij} \\ &u_i \textit{ ve } v_j \textit{ işareti belirtilmemiş} \end{aligned}$$

dir. Minimizasyon probleminde, temel dışı değişkenler için en iyilik koşulu $Z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ olmalıdır. Temeldeki değişkenlere ilişkin $Z_{ij} - c_{ij} = 0$ dır. $Z_{ij} = \mathbf{c}_B B^{-1} a_{ij}$ olduğu hatırlanırsa, a_{ij} katsayı matrisi elemanlarında, i. satır ve j. kolon değerleri "1" ve diğerleri "0" olduğundan, i. sunum ve j. isteme karşılık gelen dual değişkenlerin toplamı Z_{ij} yi verir. Bu durumda, $Z_{ij} = u_i + v_j$ olacaktır. Temeldeki her X_{ij} için, $Z_{ij} - c_{ij} = 0$ olacağından, temelde yer alan değişkenlere karşılık gelen dual değişkenler için

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

denklem sistemi yazılır. Burada, $m+n-1$ denklem ve $m+n$ sayıda eşitlik vardır. Değişkenlerden herhangi birine gelişigüzel bir değer verilerek (genellikle $u_i = 0$), denklem sisteminin bir çözümü bulunur. Böylece mevcut temel uygun çözüme karşılık gelen dual değişkenlere ilişkin bir çözüm elde edilir. Bulunan değerlerden hareketle temel dışı değişkenler için $Z_{ij} = u_i + v_j$ alınıp, $Z_{ij} - c_{ij}$ hesaplanarak, en iyilik sınaması yapılır.

Ulaştırma Modelinin Çözüm Algoritması

Amaç fonksiyonunun en küçük değeri istenilen dengelenmiş bir ulaştırma modelinin çözüm işlemleri aşağıdaki algoritmik adımlar izlenerek gerçeklenebilir.

Adım 1: Modele, “Vodel”, “Kuzey Batı Köşe” veya “Minimum Maliyet” yöntemlerinden biri ile başlangıç temel uygun çözüm bulunur.

Adım 2: Merkezlere u_i, $i = 1,2,...,m$ ler, bölgelere v_j, $j = 1,2,...,n$ ler karşı gelmek üzere, temelde yer alan X_{ij}, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$ için $u_i + v_j = c_{ij}$ denklem sisteminden u_i, $i = 1,2,...,m$ ler ve v_j, $j = 1,2,...,n$ ler bulunur. Temelde olmayan X_{ij} için, $u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ ise, en iyi çözüme ulaşılmıştır, durulur. Aksi halde, $\max\{u_i + v_j - c_{ij}\}$ ilişkisine karşılık gelen X_{kr} temele alınır.

Adım 3: X_{kr}’ ye karşılık gelen yörünge çizilip bunun olduğu hücre (+) ile başlayarak, çevrimin izleyen köşelerindeki hücreler (-), (+), (-),… biçiminde işaretlenir. (-) işaretli hücrelerdeki en küçük dağıtım kadar (+) işaretli hücrelere dağıtım yapılıp, (-) işaretli hücrelerdeki dağıtımlar bu miktar kadar azaltılır. Adım 2’ ye dönülür.

Örnek 4.1:

Aynı ürünü imal eden 3 fabrikası ve 3 deposu olan bir imalat işletmesinin ulaştırma problemini ele alalım. İşletmenin birim maliyet tablosu aşağıda verildiği gibidir.

		Depolar			
Maliyet Tablosu		**D1**	**D2**	**D3**	Kapasite
Fabrikalar	**F1**	20	8	32	20
	F2	15	25	9	15
	F3	6	12	10	25
	Talep	12	18	30	60

Buna göre, işletmenin fabrikalardan depolara yapacağı optimal dağıtım miktarını elde ediniz.

Çözüm:

Minimum maliyet yöntemi ile elde edilen başlangıç dağıtım tablosu aşağıdaki gibidir.

Maliyet Tablosu		Depolar D1	D2	D3	Kapasite
Fabrikalar	F1	20	8 **18**	32 **2**	20
	F2	15	25	9 **15**	15
	F3	6 **12**	12	10 **13**	25
	Talep	12	18	30	60

Atama yapılmış gözelere göre (temel değişkenler) $u_i, i=1,2,3$ ve $v_j, j=1,2,3$ değerleri belirlenir.

Maliyet Tablosu		Depolar D1	D2	D3	
Fabrikalar	F1	20	8 **18**	32 **2**	$u_1=0$
	F2	15	25	9 **15**	$u_2=-23$
	F3	6 **12**	12	10 **13**	$u_3=-22$
		$v_1=28$	$v_2=8$	$v_3=32$	

Atama yapılmamış gözelere göre (temelde olmayan değişkenler) için $u_i+v_j-c_{ij}\leq 0$ olup olmadığı kontrol edilir.

$u_1+v_1-c_{11}=0+28-20=8>0$

$u_2+v_1-c_{21}=-23+28-15=-10<0$

$u_2+v_2-c_{22}=-23+8-25=-40<0$

$u_3+v_2-c_{32}=-22+8-12=-26<0$

Buna göre, X_{11} hücresine atama yapılarak Adım 3' te tanımlanan kurallara göre çevrit oluşturulur.

Maliyet Tablosu		Depolar			
		D1	D2	D3	
Fabrikalar	**F1**	20 (+)	8 **18**	32 **2** (-)	$u_1 = 0$
	F2	15	25	9 **15**	$u_2 = -23$
	F3	6 **12** (-)	12	10 **13** (+)	$u_3 = -22$
		$v_1 = 28$	$v_2 = 8$	$v_3 = 32$	

(-) işaretli hücrelerdeki en küçük dağıtım $\min\{2, 12\} = 2$ olup, (-) işaretli hücrelerden 2 çıkarılıp, (+) işaretli hücrelere 2 eklenir.

Maliyet Tablosu		Depolar			
		D1	D2	D3	
Fabrikalar	**F1**	20 **2**	8 **18**	32	$u_1 = 0$
	F2	15	25	9 **15**	$u_2 = -15$
	F3	6 **10**	12	10 **15**	$u_3 = -14$
		$v_1 = 20$	$v_2 = 8$	$v_3 = 24$	

$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 24 - 32 = -8 < 0$

$u_2 + v_1 - c_{21} = -15 + 20 - 15 = -10 < 0$

$u_2 + v_2 - c_{22} = -15 + 8 - 25 = -32 < 0$

$u_3 + v_2 - c_{32} = -14 + 8 - 12 = -18 < 0$

Buna göre en iyilik ölçütü sağlanmıştır.

$\mathbf{X}^* = [X_{11}\ X_{12}\ X_{23}\ X_{31}\ X_{33}] = [2\ 18\ 15\ 10\ 15]$

Toplam maliyet: $Z = 20 \times 2 + 8 \times 18 + 9 \times 15 + 6 \times 10 + 10 \times 15 = 529$