

KONU 6: ATAMA PROBLEMLERİ

Atama problemleri, doğrusal programlama problemlerinin özel bir türüdür. Atama tipi problemlerde ulaştırma problemlerinde olduğu gibi, belirli bölgeler arası atama (nakil) işlemlerinin en küçük masrafla gerçekleştirilmesi temeline dayanmaktadır. Atama modeli, kaynakların en etkin kullanımını amaçladığından işlerin en kısa zamanda (en düşük toplam maliyetle) gerçekleşmesi istenir. Amaç, etkinliği maksimum kılmak için kaynak kullanımının bire bir dağıtımını sağlamaktır.

Bir atama modeli, kaynakları işçiler, hedefleri de işler olan özel bir ulaştırma modelidir. Her iş sadece bir makinaya (kişiye, işçiye) atanır. Buna göre, her bir kaynaktaki arz miktarı, her bir hedefteki talep miktarı sürekli olarak 1' e eşittir. Problemin matematiksel formülasyonu

$$\begin{aligned} \max / \min Z &= \sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij} \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} &= 1 \\ \sum_{j=1}^n X_{ij} &= 1 \\ X_{ij} &= \{0,1\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada,

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & i. \text{ iş } j. \text{ makinada yapılıyorsa} \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

dır.

Atama modeli, normal bir ulaştırma modeli gibi çözülebilir. Bununla birlikte, arz ve talep miktarlarının 1' e eşit olması **Macar Algoritması** olarak adlandırılan basit bir çözüm algoritmasının geliştirilmesine yol açmıştır.

- **Macar Algoritması**

Bir minimizasyon problemi için Macar algoritması adımları aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Her satırda en küçük atama gideri seçilip diğer atama giderlerinden bu değer çıkarılarak satırlara göre indirgenmiş tablo bulunur.

Adım 2: 1. Adım sonunda indirgenmiş matrisin her sütunundaki en küçük elemanı seçilip, diğer elemanlardan çıkarılarak tablo tekrar indirgenir.

Adım 3: 2. Adım sonunda bulunmuş tabloda sıfır değerini alan tüm elemanlardan en az sayıda yatay doğrular çizilir. Eğer bulunan doğru sayısı işlem sayısına eşit ise, en iyi çözüme ulaşılmış olur ve Adım 5' e gidilir.

Adım 4: Üzerinden doğru geçmeyen satır veya sütundaki en küçük eleman seçilerek doğrular dışında kalmış diğer elemanlardan çıkarılır. Doğruların kesim noktalarındaki elemanlara eklenir ve Adım 3' e dönülür.

Adım 5: Her doğru üzerinde sıfır değerli hücreler esas alınarak, her i için yalnız bir j olmak üzere en iyi çözüme karşılık gelen X_{ij} değerleri yazılıp, en iyi çözüm bulunur.

Örnek 6.1: Bir işletmede 4 iş A, B, C ve D makinalarında görülmektedir. Aşağıdaki tabloda saat olarak her bir makinanın işi bitirdiği süre görülmektedir. Atama işlemlerini kullanarak işlerin toplam en kısa zamanda gerçekleşmesi istenmektedir. Bunu sağlayacak atama biçimi ne olacaktır?

		Makinalar			
		A	B	C	D
İşler	1	5	6	3	2
	2	4	3	2	4
	3	5	4	3	2
	4	6	5	4	3

Çözüm:

Adım 1:

		Makinalar			
		A	B	C	D
İşler	1	5	6	3	2*
	2	4	3	2*	4
	3	5	4	3	2*
	4	6	5	4	3*

		Makinalar			
		A	B	C	D
İşler	1	3	4	1	0*
	2	2*	1*	0*	2
	3	3	2	1	0
	4	3	2	1	0

Adım 2:

		Makinalar			
		A	B	C	D
İşler	1	1	3	1	0
	2	0	0	0	2
	3	1	1	1	0
	4	1	1	1	0

Adım 3:

		Makinalar			
		A	B	C	D
İşler	1	1	3	1	0
	2	0	0	0	2
	3	1	1	1	0
	4	1	1	1	0

Adım 4:

		Makinalar			
		A	B	C	D
İşler	1	1	3	1	0
	2	0	0	0	2
	3	1	1	1*	0
	4	1	1	1	0

		Makinalar			
		A	B	C	D
İşler	1	0	2	0	0
	2	0	0	0	3
	3	0	0	0	0
	4	0	0	0	0

Adım 5:

$$X^* = [X_{1A} \ X_{2B} \ X_{3C} \ X_{4D}] = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Toplam maliyet: $Z = 5 + 3 + 3 + 3 = 14$

$$X^* = [X_{1D} \ X_{2C} \ X_{3B} \ X_{4A}] = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Toplam maliyet: $Z = 2 + 2 + 4 + 6 = 14$

• **Atama Modelinde Özel Durumlar**

1. Modelin amaç fonksiyonunun en büyük değeri isteniyorsa en büyük (Z)=en küçük (-Z) koşulu göz önüne alınarak çözüm bulunur. Ancak bu durumda, $c_{ij} \leq 0$ olacağından, Macar Algoritması doğrudan uygulanamaz. Bunun yerine verilen dağıtım tablosunun en büyük katkı parametresi (c_{ij}) bulunup, bu değerlerden tablonun diğer tüm değerleri çıkarılarak yeni bir tablo elde edilir. Bu tablo üzerinde Macar Algoritması minimum problem gibi uygulanarak en iyi çözüm bulunur.
2. İşlem noktası sayısı, iş sayısına eşit değil ise problemin yapısı da göz önüne alınarak modele yeterince yapay satır veya sütun eklenip karşılık gelen $c_{ij} = 0$ alınarak en iyi çözüm bulunur.
3. Bazı işlem noktalarında bazı işlerin yapılması mümkün değil ise, ilgili hücreye yeterince büyük maliyet yüklenerek, karşılık gelen karar değişkenlerinin değerinin sıfır olması sağlanır.
4. Problemden, tabloda (-) işaretli parametre (c_{ij}) var ise, algoritmanın uygulanabilmesi için ilgili satır veya sütun elemanlarına (-) işaretli parametreyi sıfır yapacak değerler eklenir.