1. AYIRMA AKSİYOMLARI

Topoloji kavramı için tek gereksinimimiz sağladığı aksiyomlardır. Bu kavram ve özellikleri anlaşıldıktan sonraki adım ise, topolojik uzaylar üzerine konulmuş olan diğer temel aksiyomları öğrenmektir. Bu bölümde, öncelikle topolojik uzaylar için bilinen temel ayırma aksiyomlarının (T_o, T_1 ve T_2) tanımları verilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenecektir. Daha sonra, regüler topolojik uzay, normal topolojik uzay ve tamamen regüler topolojik uzay kavramları ve bunların bazı önemli özellikleri üzerinde durulacaktır.

1.1. Temel Ayırma Aksiyomları

Tanım 1.1.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun ve

$$[T_0] \quad : \quad = \forall x, y \in X \ni x \neq y : \exists V \in \mathcal{V}_{(x)} \ni y \notin V \ \textit{ya da} \ \exists U \in \mathcal{V}_{(y)} \ni x \notin U$$

$$[T_1] \quad : \quad = \forall x, y \in X \ni x \neq y : \exists V \in \mathcal{V}_{(x)} \ni y \notin V \ \textit{ve} \ \exists U \in \mathcal{V}_{(y)} \ni x \notin U$$

$$[T_2] \quad : \quad = \forall x, y \in X \ni x \neq y : \exists V \in \mathcal{V}_{(x)} \ \textit{ve} \ \exists U \in \mathcal{V}_{(y)} \ni V \cap U = \emptyset$$

aksiyomları verilsin. Eğer; (X, τ) topolojik uzayı $[T_0]$ (sırasıyla, $[T_1]$, $[T_2]$) aksiyomunu gerçekliyor ise, (X, τ) topolojik uzayına T_0-uzayıdır (sırasıyla, T_1-uzayıdır, T_2-uzayı ya da Hausdorff uzayıdır) denir.

$[T_0]$, $[T_1]$ ve $[T_2]$ aksiyomlarının tanımlarından, her Hausdorff uzayının bir T_1-uzayı ve her T_1-uzayının bir T_0-uzayı olduğu açıktır.

Örnek 1.1.1. X birden fazla elemana sahip bir küme olmak üzere $(X, \{\emptyset, X\})$ en kaba topolojik uzay üç aksiyomu da sağlamaz.

Örnek 1.1.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde

$$K_1 = \{\emptyset\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$$

sağ ışın topolojisi ele alınsın. $(\mathbb{R}, K_1)$ bir T_0-uzayıdır. Gerçekten;

$$\forall x, y \in X \ni x > y : \exists V =]y, +\infty[\in \mathcal{V}_{(x)} \ni y \notin V$$

dir. Ancak T_1- uzayı değildir, dolayısıyla Hausdorff uzayı da değildir.

Örnek 1.1.3. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi,

$$\tau_s = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} - A \text{ } sonlu \text{ } elemanlı\}$$

topolojisi ile ele alındığında T_1-uzayıdır, ancak Hausdorff uzayı değildir.

Örnek 1.1.4. Her metrik uzay bir Hausdorff uzayıdır. Dolayısıyla; $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ alışılmış topolojik yapısı ile ele alındığında bir Hausdorff uzayıdır.

Teorem 1.1.1. T_0-uzayı (sırasıyla T_1-uzayı, Hausdorf uzayı) olma özelliği kalıtımsal ve topolojik bir özelliktir.

İspat: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ de X den indirgenen topolojik yapısı ile ele alınsın ve bu topoloji τ_A ile gösterilsin. $\forall a, b \in A$ öyle ki $a \neq b$ için

$a, b \in X$ ve (X, τ), T_0-uzayı olduğundan,

$$a, b \in X \ni a \neq b : \exists V \in \mathcal{V}_{(a)} \ni b \notin V \text{ } ya \text{ } da \text{ } \exists U \in \mathcal{V}_{(b)} \ni a \notin U$$

olacaktır. Diğer yandan;

$$V \in \mathcal{V}_{(a)} \text{ için } V_A = V \cap A \in \mathcal{V}_{A(a)} \ \ni b \notin V_A$$

ve

$$U \in \mathcal{V}_{(b)} \text{ için } U_A = U \cap A \in \mathcal{V}_{A(b)} \ni a \notin U_A$$

olacağından (A, τ_A) topolojik uzayının bir T_0-uzayı olduğu açıktır. T_1-uzayı ve Hausdorf uzayı olma özelliklerinin, kalıtımsal özellik olduğu da benzer şekilde gösterilir.

Şimdi T_0-uzayı olma özelliğinin topolojik bir özellik olduğunu gösterelim: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. $y \neq y'$ koşulunu sağlayan her $y, y' \in Y$ için f örten olduğundan $y = f(x)$ ve $y' = f(x')$ olacak biçimde $\exists x, x' \in X$ vardır ve $x \neq x'$ olacaktır. X, T_0-uzayı olduğundan

$$x, x' \in X, x \neq x' : \exists V \in \mathcal{V}_{(x)} \ni x' \notin V \text{ ya da } \exists U \in \mathcal{V}_{(x')} \ni x \notin U$$

olacaktır. f açık fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} V &\in \mathcal{V}_{(x)} \Rightarrow f(V) \in \mathcal{V}_{f(x)} \\ U &\in \mathcal{V}_{(x')} \Rightarrow f(U) \in \mathcal{V}_{f(x')} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca f birebir olduğundan

$$x' \notin V \Rightarrow y' = f(x') \notin f(V)$$

ve

$$x \notin U \Rightarrow y = f(x) \notin f(U)$$

dur. O halde, (Y, τ') bir T_0-uzayıdır. f fonksiyonunun bir homeomorfizm olması durumunda, (Y, τ') bir T_0-uzayı ise, (X, τ) topolojik uzayının da bir T_0-uzayı olacağı kolayca gösterilebilir. T_1-uzayı ve Hausdorff uzayı olma özelliklerinin, topolojik özellik olduğu da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 1.1.2. $(\forall k)\,(k = 1, 2, ..., n)$ için (X_k, τ_k) $n-$tane topolojik uzay olsun ve $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$ kümesi üzerinde τ_k topolojileri yardımıyla tanımlanan çarpım topolojik yapısı $\mathfrak{S}$ ile gösterilsin. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktirler.

(i) $(X, \mathfrak{S})$ çarpım topolojik uzayı T_0-uzayıdır (sırasıyla T_1-uzayıdır, Hausdorf uzayıdır),

(ii) $(\forall k)\,(k = 1, 2, ..., n)$ için (X_k, τ_k) topolojik uzayları T_0-uzayıdır (sırasıyla T_1-uzayıdır, Hausdorf uzayıdır).

İspat: $i \Rightarrow ii$ $(\forall k)\,(k = 2, ..., n)$ için $a_k \in X_k$ olsun. Bu durumda,

$$K = X_1 \times \prod_{k=2}^{n} \{a_k\} \subset X$$

olup X den indirgenen yapısıyla bir T_0-uzayıdır. Diğer yandan;

$$\begin{aligned} f: \ X_1 &\longrightarrow K = X_1 \times \prod_{k=2}^{n} \{a_k\} \\ x_1 &\longrightarrow f(x_1) = (x_1, a_2, ..., a_n) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir homeomorfizm olduğundan (X_1, τ_1) bir T_0-uzayıdır. Benzer şekilde, $(\forall k)(k = 1, 2, ..., n)$ için (X_k, τ_k) topolojik uzaylarının da T_0-uzayı olduğu görülür.

$ii \Rightarrow i$ Çarpım topolojik uzaylarda komşuluk tanımı ve çarpım kümesinin özellikleri gözönüne alındığında kolaylıkla ispatlanır.

Teorem 1.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ile de (X, τ) topolojik uzayının kapalı alt kümeler ailesi gösterilsin. Bu durumda, aşağıda verilen önermeler denktirler.

(i) (X, τ) topolojik uzayı T_1-uzayıdır,

(ii) $\forall A \subset X$, A sonlu elemanlı : $A \in \mathcal{F}$.

İspat: $i \Rightarrow ii$ $A = \{a_k \mid k = 1, 2, ..., n\}$ olsun. Herhangi bir $x \in X - A$ alalım. Bu durumda;

$$\forall k = 1, 2, ..., n \text{ için } x \neq a_k$$

olacaktır. (X, τ), T_1-uzayı olduğundan;

$$\forall k = 1, 2, ..., n : \exists V_k \in \mathcal{V}_{(a_k)} \ni x \notin V_k \ ve \ \exists U^{(k)} \in \mathcal{V}_{(x)} \ni a_k \notin U^{(k)}$$

dır. Diğer yandan,

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U^{(k)} \in \mathcal{V}_{(x)} \text{ ve } \forall k = 1, 2, ..., n : a_k \notin U$$

olur. Buradan $U \subset X - A$ olduğu elde edilir. O halde, $A \in \mathcal{F}$ dir.

$ii \Rightarrow i$ $\forall x, y \in X \ni x \neq y : A = \{x\}$ ve $A' = \{y\} \in \mathcal{F}$ olacağından (X, τ) topolojik uzayının T_1-uzayı olduğu kolayca görülür.

Aşağıda verilen önermenin ispatı alıştırma olarak bırakılmıştır.

Önerme 1.1.1. (X, τ) bir T_0-uzayı (sırasıyla T_1-uzayı, Hausdorf uzayı) ve $\tau \preceq \tau'$ (yani τ' topolojisi τ topolojisinden daha ince) olsun. Bu durumda; (X, τ') de bir T_0-uzayı (sırasıyla T_1-uzayı, Hausdorf uzayı) dır.

Önerme 1.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıda verilen önermeler denktirler.

(i) (X, τ) Hausdorff uzayıdır,

(ii) $\forall x \in X : \bigcap_{V \in \mathcal{V}_{(x)}} \overline{V} = \{x\}$ dir.

İspat: $i \Rightarrow ii$ $\forall x \in X : \{x\} \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}_{(x)}} \overline{V}$ olduğu açıktır. Biran için $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_{(x)}} \overline{V} \nsubseteq \{x\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$\exists y \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_{(x)}} \overline{V} \ni y \neq x$$

dir. X, Hausdorff uzayı olduğundan, $\exists V \in \mathcal{V}_{(x)}$ ve $\exists U \in \mathcal{V}_{(y)}$ için $V \cap U = \emptyset$ olacaktır. Buradan $y \notin \overline{V}$ sonucu elde edilir. Bu ise, $\forall V \in \mathcal{V}_{(x)}$ için $y \in \overline{V}$ olması ile çelişir. O halde, $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}_{(x)}} \overline{V} \subset \{x\}$ dir.

$ii \Rightarrow i$ $\forall x, y \in X \ni x \neq y$ alalım. Bu durumda, $y \notin \{x\} = \bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}_{(x)}} \overline{V}$ olur. O halde, $\exists V \in \mathcal{V}_{(x)}$ için $y \notin \overline{V}$ olacaktır. O halde, $\exists U \in \mathcal{V}_{(y)}$ için $U \cap V = \emptyset$ dir.