1.2. Regüler Uzaylar

Regüler topolojik uzay tanımını vermeden önce; bir topolojik uzayda, verilen bir noktanın komşuluklar tabanının nasıl tanımlandığını hatırlayalım: (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathcal{B}_{(x)} \subset \mathcal{V}_{(x)}$ olsun. Eğer;

$$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}_{(x)} : \exists B \in \mathcal{B}_{(x)} \ni B \subset V$$

oluyor ise $\mathcal{B}(x)$ alt kümeler ailesi x noktasının bir komşuluklar tabanıdır denir.

Önerme 1.2.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıda verilen önermeler denktirler.

$[R_I]$ (X, τ) topolojik uzayının herhangi bir noktasının kapalı komşuluklar ailesi o noktanın bir komşuluklar tabanıdır,

$[R_{II}]$ (X, τ) topolojik uzayının, herhangi bir F kapalı alt kümesi ve $x \notin F$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ noktası için, $\exists U, V \in \tau$ vardır öyle ki $x \in U$, $F \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

İspat: $[R_I] \Rightarrow [R_{II}]$ Herhangi bir $F \subset X, F \in \mathcal{F}$ alalım. Bu durumda,

$$\forall x \notin F : x \in V = X - F \in \tau$$

olacaktır. x noktasının kapalı komşuluklar ailesini $\mathcal{K}_{(x)}$ ile gösterirsek; hipotezden

$\exists K \in \mathcal{K}_{(x)}$ vardır öyle ki $K \subset V$ dir. Buradan,

$$F \subset X - K \in \tau$$

elde edilir. Diğer yandan; $K \in \mathcal{V}_{(x)}$ olduğundan $\exists O \in \tau$ vardır öyle ki $x \in O \subset K$ olup $O \cap (X - K) = \emptyset$ dir.

$[R_{II}] \Rightarrow [R_I]$ Her $x \in X$ ve her $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ için $x \in O \subset V$ olacak biçimde $\exists O \in \tau$ vardır. Buradan $x \notin F = X - O \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. O halde;

$$x \in U, F \subset U' \text{ ve } U \cap U' = \emptyset \text{ olacak biçimde } \exists U, U' \in \tau$$

vardır. Dolayısıyla;

$$U \subset X - U' \subset X - F \subset V$$

olacaktır. $X - U'$ kümesi x noktasının kapalı komşuluklar ailesine ait olduğundan ispat tamamlanır.

Tanım 1.2.1. $[R_I]$ önermesini gerçekleyen her Hausdorff uzayına, *regüler topolojik uzay* adı verilir.

Uyarı 1.2.1. Literatüre bakıldığında; regüler topolojik uzay tanımı verilirken, $[R_I]$ önermesine farklı koşullar eklendiği görülecektir. Bizim verdiğimiz tanım Bourbaki[1] tarafından verilen tanımdır. Ayrıca, literatürde $[T_1]$ ve $[R_I]$ önermesini gerçekleyen her topolojik uzaya T_3-uzayı denir.

Örnek 1.2.1. $(\mathbb{R}, K_1)$ topolojik uzayı $[R_I]$ aksiyomunu sağlamaz.

Örnek 1.2.2. Her metrik uzay bir regüler topolojik uzaydır. Gerçekten; bir (X, d) metrik uzayında her $x \in X$ ve her $V \in \mathcal{V}_{\tau_d(x)}$ için $B_d(x, \varepsilon_v) \subset V$ olacak biçimde $\exists \varepsilon_v > 0$ vardır. Her $\varepsilon_v > 0$ için, $\frac{1}{n_{\varepsilon_v}} < \varepsilon_v$ olacak biçimde bir $n_{\varepsilon_v} \in \mathbb{N}$ bulunabilir. O halde,

$$K_{(x)} := \{B_d[x, 1/n_{\varepsilon_v}] \mid \varepsilon_v > 0\}$$

ailesi x noktasının bir kapalı komşuluklar tabanıdır.

Örnek 1.2.3. $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ alışılmış topolojik uzayı regüler topolojik uzaydır.

Hausdorff uzayı olma özelliği kalıtımsal ve topolojik bir özellik olduğundan, aşağıda verilen iki teoremde regülerlik sadece $[R_I]$ önermesi ile karakterize edilecektir.

Teorem 1.2.1. Regüler topolojik uzay olma özelliği kalıtımsal bir özelliktir.

İspat: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ de X den indirgenen topolojik yapısı (τ_A), ile ele alınsın. Herhangi bir $a \in A$ ve a noktasının herhangi bir $U \in \mathcal{V}_{\tau_A(x)}$ komşuluğunu alalım. Bu durumda;

$$U = V_u \cap A \text{ olacak biçimde } \exists V_u \in \mathcal{V}_{(x)}$$

vardır. X regüler olduğundan; $a \in A \subset X$ ve $V_u \in \mathcal{V}_{(x)}$ için $\exists K_u \in \mathcal{V}_{(x)}$ vardır öyle ki $K_u \in \mathcal{F}$ ve $K_u \subset V_u$ olur. Buradan

$$K_{A_u} = K_u \cap A \subset V_u \cap A = U$$

elde edilir. Bu şekilde elde edilen K_{A_u} kümeleri (A, τ_A) alt uzayında a noktasının bir kapalı komşuluklar tabanını oluşturur.

Teorem 1.2.2. Regülerlik topolojik bir özelliktir.

İspat: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. (X, τ) topolojik uzayının regüler olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $y \in Y$ noktası ve y noktasının herhangi bir $V \in \mathcal{V}_{(y)}$ komşuluğunu alalım. f örten olduğundan $y = f(x)$ olacak biçimde $\exists x \in X$ vardır ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{(x)}$ dir. x noktası kapalı bir komşuluklar tabanına sahip olduğundan;

$$\exists K_v \in \mathcal{V}_{(x)}, K_v \in \mathcal{F} \text{ vardır öyle ki } K_v \subset f^{-1}(V)$$

dir. Buradan,

$$y \in f(K_v) \subset V$$

olur. Her homeomorfizm hem açık hem de kapalı fonksiyonlar sınıfından olduğundan $f(K_v)$ kümesi y noktasının kapalı bir komşuluğudur. Bu şekilde elde edilen $f(K_v)$ kümeleri (Y, τ') topolojik uzayında y noktasının bir kapalı komşuluklar tabanını oluşturur. O halde, (Y, τ') regüler topolojik uzaydır. Benzer şekilde,

(Y, τ') regüler topolojik uzay olduğunda, (X, τ) topolojik uzayının da regüler olacağı kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 1.2.3. Kompakt her Hausdorff uzayı regülerdir.

İspat: (X, τ) kompakt bir Hausdorff uzayı olsun. Herhangi bir $F \subset X, F \in \mathcal{F}$ ve $x \notin F$ koşulunu sağlayan herhangi bir $x \in X$ alalım. Bu durumda;

$$\forall y \in F : x \neq y$$

olup, X Hausdorff uzayı olduğundan

$$\forall y \in F : \ \exists V^{(y)} \in \mathcal{V}_{(x)} \ ve \ \exists U_y \in \mathcal{V}_{(y)} \ni V^{(y)} \cap U_y = \emptyset$$

olacaktır. Burada genelliği bozmayacağından, elde edilen $V^{(y)}$ ve U_y komşuluklarının açık olduğu kabul edilebilir. Böylece, $(U_y)_{y \in F} \subset \tau$ ailesi F kümesinin bir açık örtüsü olup, F kümesi X den indirgenen yapısıyla (τ_F), kompakt olduğundan,

$$\exists K = \{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset F \ni F \subset U = \bigcup_{k=1}^{n} U_{y_k} \in \tau$$

olacaktır. Diğer yandan;

$$x \in V = \bigcap_{k=1}^{n} V^{(y_k)} \in \tau$$

ve $U \cap V = \emptyset$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.2.4. Lokal kompakt bir Hausdorff uzayının açık her alt uzayı da lokal kompakttır.

İspat: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $A \in \tau$ olsun. Herhangi bir $a \in A$ alalım. $a \in A \subset X$ ve X lokal kompakt olduğundan, $\exists V \in \mathcal{V}_{(a)}$ vardır öyle ki (V,τ_V) kompakt bir Hausdorff uzayıdır. Dolayısıyla; (V,τ_V) regülerdir, yani V nin her elemanı bir kapalı komşuluklar tabanına sahiptir. Böylece,

$$W = A \cap V \in \mathcal{V}_{\tau_V(a)}$$

komşuluğu için, $G \subset W$ koşulunu sağlayan bir $G \in \mathcal{V}_{\tau_V(a)}$ kapalı komşuluğu bulunabilir. G kümesi, V den indirgenen topolojik yapısıyla kompakt olduğundan ve kompaktlık topolojik bir özellik olduğundan, A dan indirgenen yapısıyla da kompakttır. Diğer yandan, G kümesinin, A altuzayında da a noktasının bir komşuluğu olduğu açıktır. O halde, (A,τ_A) lokal kompakttır.

.