1.2. Regüler Uzaylar-2

Teorem 1.2.5. Lokal kompakt her Hausdorff uzayı regülerdir.

İspat: (X,τ) lokal kompakt olsun. Herhangi bir $x \in X$ ve $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ alalım. O halde, $x \in A \subset V$ olacak biçimde bir $A \in \tau$ vardır. (A, τ_A) lokal kompakt olduğundan, x noktasının (A, τ_A) alt uzayından indirgenen yapısıyla kompakt olan bir $W \in \mathcal{V}_{\tau_A(x)}$ komşuluğu vardır. W, X den indirgenen yapısıyla da kompakt olup, (X,τ) topolojik uzayında x noktasının kapalı bir komşuluğudur. O halde, (X,τ) regülerdir.

Teorem 1.2.6. $(\forall k)\,(k = 1, 2, ..., n)$ için (X_k, τ_k) $n-$tane topolojik uzay olsun ve $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ kümesi üzerinde τ_k topolojileri yardımıyla tanımlanan çarpım topolojik yapısı $\mathfrak{S}$ ile gösterilsin. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktirler.

(i) $(X, \mathfrak{S})$ çarpım topolojik uzayı regülerdir,

(ii) $(\forall k)\,(k = 1, 2, ..., n)$ için (X_k, τ_k) topolojik uzayları regülerdir.

İspat: $i \Rightarrow ii$ $(\forall k)\,(k = 2, ..., n)$ için $a_k \in X_k$ olsun. Bu durumda,

$$K = X_1 \times \prod_{k=2}^{n} \{a_k\} \subset X$$

olup X den indirgenen yapısıyla regüler topolojik uzaydır. Diğer yandan;

$$f : X_1 \longrightarrow K = X_1 \times \prod_{k=2}^{n} \{a_k\}\,, f\,(x_1) = (x_1, a_2, ..., a_n)$$

fonksiyonu bir homeomorfizm olduğundan (X_1, τ_1) regülerdir. Benzer şekilde, $(\forall k)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ için (X_k, τ_k) topolojik uzaylarının da regüler olduğu görülür.

$ii \Rightarrow i$ Herhangi bir $x \in X$ ve $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ alalım. Bu durumda,

$$(\forall k)\,(k = 1, 2, ..., n) \text{ için } \exists U_k \in \mathcal{V}_{(x_k)} \text{ vardır öyle ki } \prod_{k=1}^{n} U_k \subset V$$

dir. Hipotezden, $(\forall k)\,(k = 1, 2, ..., n)$ için $G_k \subset U_k$ olacak biçimde $\exists G_k \in \mathcal{V}_{(x_k)}$ vardır öyle ki $G_k \in \mathcal{F}_k$ dır. Buradan

$$\prod_{k=1}^{n} G_k \subset \prod_{k=1}^{n} U_k \subset V$$

olup $\prod_{k=1}^{n} G_k \in \mathcal{V}_{(x)}$ dir. Diğer yandan; $\prod_{k=1}^{n} G_k$ çarpım uzayının kapalı bir alt kümesidir.

Tanım 1.2.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer, X in her noktası sayılabilir bir komşuluklar tabanına sahip ise, (X, τ) topolojik uzayına birinci sayılabilir topolojik uzay adı verilir. Yani;

$$\forall x \in X : \exists \mathcal{B}_{(x)} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}_{(x)}$$

alt kümeler ailesi ve $\forall V \in \mathcal{V}_{(x)}$ için $V_n \subset V$ olacak biçimde $\exists n \in \mathbb{N}$ var ise, X birinci sayılabilir topolojik uzaydır.

Örnek 1.2.4. $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ birinci tip sayılabilir topolojik uzaydır.

Önerme 1.2.2. (X, τ) birinci tip sayılabilir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $a \in A$

olsun. Eğer; a noktası A kümesinin bir yığılma noktası ise, terimleri $A - \{a\}$ kümesinde olan ve x noktasına yakınsayan bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır.

Tanım 1.2.3. (X, τ) bir Hausdorff uzayı olsun. Eğer; X in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu elemanlı bir alt ailesi de X uzayını örtüyor ise, (X, τ) topolojik uzayına sayılabilir kompakttır denir.

Sayılabilir kompaktlık topolojik bir özelliktir. Sayılabilir kompakt bir uzayın kapalı her alt uzayı da sayılabilir kompakttır.

Teorem 1.2.7. (X, τ) birinci sayılabilir ve sayılabilir kompakt bir topolojik uzay ise, (X, τ) regülerdir.

İspat: $x \in X$ olsun ve herhangi bir $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ alalım. Bu durumda, $x \in U \subset V$ olacak biçimde $\exists U \in \tau$ vardır. X birinci tip sayılabilir topolojik uzay olduğundan;

$$\exists \mathcal{B}_{(x)} = (G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}_{(x)}$$

sayılabilir komşuluklar tabanı vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
V_1 &= G_1 \\
V_2 &= G_1 \cap G_2 \subset V_1 \\
V_3 &= G_1 \cap G_2 \cap G_3 \subset V_2 \\
&\cdots \\
V_n &= G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \subset V_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak tanımlansın, bu şekilde devam edilerek, x noktasının sayılabilir azalan bir komşuluklar tabanı elde edilir. X Hausdorff uzayı olduğundan; $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$ dır. O halde;

$$X = U \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(X - \overline{V_n}\right) \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(U \cup \left(X - \overline{V_n}\right)\right)$$

olur ve X sayılabilir kompakt olduğundan;

$$X = \bigcup_{k=1}^{p} \left(U \cup \left(X - \overline{V_n}\right)\right)$$

dır. Buradan

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{V_{n_k}} \right) \cap (X - U) = \emptyset$$

elde edilir. O halde,

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{V_{n_k}} \subset U \subset V$$

olacak biçimde x noktasının kapalı bir komşuluğunun varlığı görülür. O halde, (X, τ) topolojik uzayı regülerdir.