1.3. Normal Uzaylar

Bu bölümde; regülerlikten daha kuvvetli bir ayırma aksiyomu tanımlanarak bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 1.3.1. (X, τ) bir Hausdorff uzayı olsun. Eğer,

$$\forall F, K \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset : \exists U, V \in \tau \ni F \subset U, K \subset V \text{ ve } U \cap V = \emptyset \qquad (1.3.1.)$$

önermesi gerçekleniyor ise, (X, τ) topolojik uzayına *normal topolojik uzay* denir.

Uyarı 1.3.1. Literatüre bakıldığında; bazı kaynaklar, $[T_1]$ ve 1.3.1. önermesini gerçekleyen topolojik uzayları T_4-uzayı olarak adlandırmıştır.

Örnek 1.3.1. $(X, P(X))$ en ince topolojik uzayı normaldir.

Örnek 1.3.2. Her metrik uzay normal topolojik uzaydır.

İspat: (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, τ_d) topolojik uzayının ayrık olan herhangi iki F, K kapalı alt kümesini alalım. Bu durumda; $d(F, K) = \rho > 0$ olmak zorundadır. Buradan

$$F \subset U = \bigcup_{x \in F} B_d(x, \rho/3) \in \tau_d$$

ve

$$K \subset V = \bigcup_{x \in K} B_d(x, \rho/3) \in \tau_d$$

olduğu kolaylıkla görülür. Diğer yandan, $U \cap V = \emptyset$ dir. O halde, (X, d) metrik uzayı d metriğinin ürettiği topolojiye göre normal topolojik uzaydır. (Bu ispat Prof.Dr. Mustafa Çiçek'in ders notlarından alınmıştır.)

Örnek 1.3.3. $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ alışılmış topolojik uzayı normal topolojik uzaydır.

Normal topolojik uzayların karakterizasyonu için, 1.3.1. ile verilen önermeye denk olan başka önermeler de vardır. Şimdi bunların bazılarını verelim.

Teorem 1.3.1. (X, τ) bir Hausdorff uzayı olsun. Aşağıda verilen önermeler denktirler.

(i) (X, τ) normal topolojik uzaydır,

(ii) $\forall F, K \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset : \exists U, V \in \tau \ni F \subset U, K \subset V$ ve $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$,

(iii) $\forall F \subset X, F \in \mathcal{F}$ ve $F \subset U$ koşulunu sağlayan $\forall U \in \tau : \exists V \in \tau \ni F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

İspat: $i \Rightarrow ii$ $F \cap K = \emptyset$ koşulunu sağlayan her $F, K \in \mathcal{F}$ için hipotezden;

$$F \subset U, K \subset V \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ olacak biçimde } \exists U, V \in \tau$$

vardır. Buradan

$$F' = X - U \in \mathcal{F}, F' \subset X - F \text{ ve } F \cap F' = \emptyset$$

dir. X normal topolojik uzay olduğundan;

$$F \subset G, F' \subset G' \text{ ve } G \cap G' = \emptyset \text{ olacak biçimde } \exists G, G' \in \tau$$

vardır. Buradan

$$\overline{G} \subset X - G' \subset U$$

elde edilir. Diğer yandan;

$$K' = X - V \in \mathcal{F}, K' \subset X - K \text{ ve } K \cap K' = \emptyset$$

olduğundan,

$$K \subset H, K' \subset H' \text{ ve } H \cap H' = \emptyset \text{ olacak biçimde } \exists H, H' \in \tau$$

vardır. Benzer şekilde,

$$\overline{H} \subset X - H' \subset V$$

olduğu kolaylıkla görülür. Böylece, $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$ elde edilir.

$ii \Rightarrow iii$ Herhangi bir $F \subset X, F \in \mathcal{F}$ ve $F \subset U$ koşulunu sağlayan herhangi bir $U \in \tau$ alalım. Bu durumda,

$$K = X - U \in \mathcal{F} \;\text{ ve } F \cap K = \emptyset$$

olacaktır. Böylece, X in ayrık iki kapalısı elde edilir. X normal topolojik uzay olduğundan;

$$F, K \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset : \exists G, H \in \tau \ni F \subset G, K \subset H \text{ ve } \overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$$

olur. Buradan

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset X - \overline{H} \subset X - K = U$$

olur.

$iii \Rightarrow i$ $F \cap K = \emptyset$ koşulunu sağlayan herhangi iki $F, K \in \mathcal{F}$ alalım. Bu durumda, $F \subset U = X - K \in \tau$ olur. O halde, hipotezden

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset U \text{ olacak biçimde } \exists G \in \tau$$

vardır. Buradan,

$$K \subset H = X - \overline{G} \in \tau \text{ ve } G \cap H = \emptyset$$

dir.

Normal topolojik uzay olma özelliği kalıtımsal bir özellik değildir. Karşıt örnek [3] sayfa 145 de verilmiştir.

Teorem 1.3.2. Normal topolojik uzayın kapalı her alt uzayı da normal topolojik uzaydır.

İspat: (X, τ) normal topolojik uzay, $A \subset X$ ve $A \in \mathcal{F}$ olsun. $F \cap K = \emptyset$ koşulunu sağlayan her $F, K \in \mathcal{F}_A$ için $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$ ve X normal topolojik uzay olduğundan;

$$F \subset U, K \subset V \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ olacak biçimde } \exists U, V \in \tau$$

vardır. Buradan

$$F \subset G = U \cap A \in \tau_A, K \subset H = V \cap A \in \tau_A \text{ ve } G \cap H = \emptyset$$

olduğu elde edilir.

Teorem 1.3.3. Normal topolojik uzay olma özelliği topolojik bir özelliktir.

İspat: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. (X, τ) topolojik uzayının normal topolojik uzay olduğunu kabul edelim. $F \cap K = \emptyset$ koşulunu sağlayan her $F, K \in \mathcal{F}'$ için

$$f^{-1}(F), f^{-1}(K) \in \mathcal{F} \text{ ve } f^{-1}(F) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$$

dir. O halde,

$$f^{-1}(F) \subset G, f^{-1}(K) \subset H \text{ ve } G \cap H = \emptyset \text{ koşulunu sağlayan } \exists G, H \in \tau$$

vardır. f örten olduğundan;

$$F \subset f(G) \text{ ve } K \subset f(H)$$

olur. Her homeomorfizm açık fonksiyonlar sınıfından olduğuna göre

$$f(G) \text{ ve } f(H) \in \tau'$$

olur. Diğer yandan $f(G) \cap f(H) = \emptyset$ dir. O halde, (Y, τ') normal topolojik uzaydır. Benzer şekilde, (Y, τ') normal topolojik uzay olduğunda, (X, τ) topolojik uzayının da normal topolojik uzay olacağı kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç 1.3.1. Sürekli, örten ve açık fonksiyonlar altında normal topolojik uzayın görüntüsü de normal topolojik uzaydır.

Normal topolojik uzayların kartezyen çarpımı normal topolojik uzay olmak zorunda değildir. Karşıt örnek [3] sayfa 144 de verilmiştir. Ancak bu önermenin karşıtı doğrudur. Yani çarpım topolojik uzay normal ise her bir çarpanda normal topolojik uzay olmak zorundadır. Aşağıdaki önermede bu durum sonlu çarpım için gösterilmiştir.

Teorem 1.3.4. $(\forall k)\,(k = 1, 2, ..., n)$ için (X_k, τ_k) $n-$tane topolojik uzay olsun ve $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$ kümesi üzerinde τ_k topolojileri yardımıyla tanımlanan çarpım topolojik yapısı $\mathfrak{S}$ ile gösterilsin. Bu durumda, $(X, \mathfrak{S})$ çarpım uzayı normal topolojik uzay ise, $(\forall k)\,(k = 1, 2, ..., n)$ için (X_k, τ_k) topolojik uzayları normaldir.

İspat: İzdüşüm fonksiyonları sürekli, açık ve örten fonksiyonlar olduğundan ispat açıktır.

Teorem 1.3.5. Kompakt her Hausdorff uzayı normaldir.

İspat: (X, τ) kompakt bir Hausdorff uzayı olsun. Her $F, K \subset X, F, K \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset$ için $F \subset X - K$ dır. O halde,

$$\forall x \in F : x \notin K$$

olur. Kompakt her Hausdorff uzayı regüler olduğundan;

$$x \notin K \in \mathcal{F} : \exists U_x, H^x \in \tau \ni x \in U_x, K \subset H^x \text{ ve } U_x \cap H^x = \emptyset$$

dir. Bu şekilde elde edilen $(U_x)_{x \in F} \subset \tau$ ailesi F nin bir açık örtüsü olur. F, X den indirgenen yapısıyla kompakt olduğundan

$$\exists J = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset F \text{ vardır} \ni F \subset U = \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$$

dır. Diğer yandan,

$$K \subset H = \bigcap_{k=1}^{n} H^{x_k} \in \tau$$

olur. Ayrıca,

$$\forall k = 1, 2, ..., n : U_{x_k} \cap H^{x_k} = \emptyset$$

olduğuna göre; $H \cap U = \emptyset$ elde edilir.

Teorem 1.3.6. (X, τ) bir Hausdorrf uzayı olsun. Aşağıda verilen önermeler denktirler.

(i) (X, τ) normal topolojik uzaydır.

(ii) $\forall F, K \subset X, F, K \in \mathcal{F} \ni F \cap K = \emptyset : f(F) = \{1\}$ ve $f(K) = 0$ koşulunu sağlayan sürekli bir $f : X \longrightarrow I = [0, 1]$ fonksiyonu vardır.