1.4.1. Tamamen Regüler Uzaylar

Önerme 1.4.1. (X,τ) bir topolojik uzay olsun ve $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ kümesi $(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ dan indirgenen yapısıyla ele alınsın. Aşağıdaki önermeler denktirler.

$[TR_1]$ $\forall F\subset X, F\in\mathcal{F}$ ve $x\notin F$ koşulunu sağlayan $\forall x\in X: f(x)=0$ ve $f(F)=\{1\}$ olacak biçimde $\exists f:X\longrightarrow I$ sürekli fonksiyonu mevcuttur,

$[TR_2]$ $\forall x\in X$ ve $\forall V\in\mathcal{V}_{(x)}: f(x)=0$ ve $f(X-V)=\{1\}$ olacak biçimde $\exists f:X\longrightarrow I$ sürekli fonksiyonu mevcuttur.

İspat: $[TR_1]\Rightarrow[TR_2]$ $\forall x\in X$ ve $\forall V\in\mathcal{V}_{(x)}: x\in U\subset V$ olacak biçimde $\exists U\in\tau$ vardır. O halde, $X-U\in\mathcal{F}, x\notin X-U$ için

$$f(x)=0 \text{ ve } f(X-U)=\{1\}$$

olacak biçimde sürekli bir $f:I\longrightarrow X$ fonksiyonu mevcuttur. Ayrıca

$$f(X-V)=\{1\}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece ispat tamamlanır.

$[TR_2]\Rightarrow[TR_1]$ $F\subset X, F\in\mathcal{F}$ olsun ve $x\notin F$ koşulunu sağlayan herhangi bir $x\in X$ alalım. Bu durumda; $X-F\in\mathcal{V}_{(x)}$ olur. Hipotezden,

$$f(x)=0 \text{ ve } f(F)=\{1\}$$

olacak biçimde sürekli bir $f:X\longrightarrow I$ fonksiyonu mevcuttur.

Tanım 1.4.1. (X,τ) bir Hausdorff uzayı olsun ve $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ kümesi $(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ dan indirgenen yapısıyla ele alınsın.Eğer; (X,τ) topolojik uzayı $[TR_1]$ önermesini gerçekliyor ise, (X,τ) topolojik uzayına *tamamen regülerdir* denir.

Uyarı 1.4.1. Literatüre bakıldığında; bazı kaynaklar, $[T_1]$ ve $[TR_1]$ önermesini gerçekleyen topolojik uzayları $T_{3/2}-$uzayı olarak adlandırmıştır.

Örnek 1.4.1. Tamamen regüler her topolojik uzay regülerdir.

İspat: $\forall F\subset X, F\in\mathcal{F}$ ve $x\notin F$ koşulunu sağlayan $\forall x\in X$ için, X tamamen regüler olduğundan, $f(x)=0$ ve $f(F)=\{1\}$ olacak biçimde $\exists f:X\longrightarrow I$ sürekli fonksiyonu mevcuttur. Buradan

$$x\in G=f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\right)\in\tau$$

ve

$$F\subset H=f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right)\in\tau$$

olup $G\cap H=\emptyset$ dir. O halde, X regülerdir.

Teorem 1.4.1. Tamamen regülerlik kalıtımsal bir özelliktir.

İspat: (X,τ) tamamen regüler ve $A\subset X$ olsun. Herhangi bir $F\in\mathcal{F}_A$ ve $a\notin F$ koşulunu sağlayan herhangi bir $a\in A$ alalım. Bu durumda,

$$F=K\cap A \text{ olacak biçimde } \exists K\in\mathcal{F}$$

vardır ve $a \notin K$ olacaktır. X tamamen regüler olduğundan,

$$f(x) = 0 \text{ ve } f(K) = \{1\}$$

olacak biçimde sürekli bir $f : X \longrightarrow I$ fonksiyonu mevcuttur. O halde,

$$\begin{array}{rccl} g = f_{/A} : & A & \longrightarrow & X \\ & x & \longrightarrow & g(x) = f_{/A}(x) = f(x) \end{array}$$

fonksiyonu da sürekli olacaktır. Diğer yandan,

$$g(x) = 0 \text{ ve } g(F) = \{1\}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 1.4.2. Tamamen regülerlik topolojik bir özelliktir.

İspat: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. (X, τ) topolojik uzayının tamamen regüler olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $F \subset Y, F \in \mathcal{F}'$ ve $y \notin F$ koşulunu sağlayan herhangi bir $y \in Y$ alalım. f sürekli olduğundan $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}$ dir. f örten olduğundan, $y = f(x)$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır, ayrıca $x \notin f^{-1}(F)$ dir. X tamamen regüler olduğuna göre

$$g(x) = 0 \text{ ve } g\left(f^{-1}(F)\right) = \{1\}$$

olacak biçimde sürekli bir $g : X \longrightarrow I$ fonksiyonu mevcuttur. O halde,

$$\begin{array}{rcl} h = g \circ f^{-1} : \; Y & \longrightarrow & I \\ y & \longrightarrow & h(y) = g \circ f^{-1} \end{array}$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonu sürekli ve

$$h(y) = 0, h(F) = \{1\}$$

dir. Dolayısıyla, (Y, τ') tamamen regülerdir. Benzer şekilde, Y tamamen regüler olduğunda, X in de tamamen regüler olacağı gösterilebilir.

Teorem 1.4.3. (X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) iki topolojik uzay olsun ve $X = X_1 \times X_2$ kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri yardımıyla tanımlanan çarpım topolojik yapısı $\mathfrak{S}$ ile gösterilsin. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktirler.

(i) $(X, \mathfrak{S})$ çarpım topolojik uzayı tamamen regülerdir,

(ii) (X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) topolojik uzayları tamamen regülerdir.

İspat: $i \Rightarrow ii$ $(\forall k)\,(k = 1, 2)$ için $a_k \in X_k$ olsun. Bu durumda,

$$K = X_1 \times \{a_2\} \text{ ve } F = \{a_1\} \times X_2 \subset X$$

olup X den indirgenen yapılarıyla tamamen regüler topolojik uzaydır. Diğer yandan;

$$\begin{array}{rrcl} f : & X_1 & \longrightarrow & K \\ & x_1 & \longrightarrow & f(x_1) = (x_1, a_2) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} g: & X_2 & \longrightarrow & F \\ & x_2 & \longrightarrow & g(x_2) = (a_1, x_2) \end{array}$$

fonksiyonlar birer homeomorfizm olduğundan (X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) tamamen regülerdir.

$ii \Rightarrow i$ Herhangi bir $x = (x_1, x_2) \in X$ ve herhangi bir $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ alalım. O halde, $V_1 \times V_2 \subset V$ olacak biçimde bir $V_1 \in \mathcal{V}_{(x_1)}$ ve $V_2 \in \mathcal{V}_{(x_2)}$ vardır. X_1 ve X_2 tamamen regüler olduğundan;

$$f_1(x_1) = 0 \text{ ve } f_1(X_1 - V_1) = \{1\}$$

olacak biçimde sürekli bir $f_1 : X_1 \longrightarrow I$ fonksiyonu ve

$$f_2(x_2) = 0 \text{ ve } f_2(X_2 - V_2) = \{1\}$$

olacak biçimde sürekli bir $f_2 : X_2 \longrightarrow I$ fonksiyonu mevcuttur. Böylece, izdüşüm fonksiyonları yardımıyla tanımlanan,

$$\begin{array}{rccl} g_1 = f_1 \circ P_1 : & X & \longrightarrow & I \\ & x & \longrightarrow & g_1(x) = (f_1 \circ P_1)(x) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} g_2 = f_2 \circ P_2 : & X & \longrightarrow & I \\ & x & \longrightarrow & g_2(x) = (f_2 \circ P_2)(x) \end{array}$$

sürekli fonksiyonları elde edilir. Buradan

$$\begin{array}{rccl} h: & X & \longrightarrow & I \\ & x & \longrightarrow & h(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\} \end{array}$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır, ayrıca

$$h(x) = 0 \text{ ve } h(X - V) = \{1\}$$

eşitlikleri gerçeklenir.