2. Topolojik Uzaylarda Bağlantılılık

2.1. Bağlantılı Topolojik Uzaylar

Tanım 2.1.1. (X, τ) topolojik uzayının her biri boş kümeden farklı olan ayrık iki açıktan oluşan bir örtüsü yok ise, (X, τ) topolojik uzayına *bağlantılıdır* denir.

Bağlantılık, denklikleri açıkca görülebilen aşağıdaki önermelerle de karakterize edilebilir.

Önerme 2.1.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıda verilen önermeler denktirler.

(i) (X, τ) bağlantılıdır,

(ii) (X, τ) topolojik uzayının ayrık iki kapalıdan oluşan bir örtüsü yoktur,

(iii) X in boş küme ve kendisinden başka hem açık hem kapalı olan bir alt kümesi yoktur.

Uyarı 2.1.1. Yukarıda verilen karakterizasyonlar ve değillerinin matematiksel olarak nasıl ifade edildiği ispatların anlaşılması açısından önemlidir. Bağlantılı olmayan bir topolojik uzaya bağlantısızdır denir.

$$
\begin{aligned}
X \text{ bağlantılıdır} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall A, B \in \tau, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset : X = A \cup B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset, \\
&\Leftrightarrow \quad \forall F, K \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset, K \neq \emptyset : X = F \cup K \Rightarrow F \cap K \neq \emptyset, \\
&\Leftrightarrow \quad \forall A \subset X, A \in \tau \cap \mathcal{F} : A \neq \emptyset \Rightarrow A = X
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned} X \text{ bağlantısızdır} &\Leftrightarrow \exists A, B \in \tau, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset : X = A \cup B \ ve \ A \cap B = \emptyset, \\ &\Leftrightarrow \exists F, K \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset, K \neq \emptyset : X = F \cup K \ ve \ F \cap K = \emptyset, \\ &\Leftrightarrow \exists A \subset X, A \in \tau \cap \mathcal{F} : A \neq \emptyset \ ve \ A \neq X. \end{aligned}$$

Örnek 2.1.1. X birden fazla elemana sahip bir küme olsun. Bu durumda, $(X, P(X))$ bağlantılı değildir.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, üst limit topoloji ile gözönüne alındığında bağlantılı değildir. Gerçekten; herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için

$$A = \{x \mid x > t\} \text{ ve } B = \{x \mid x \leq t\} \in \tau_{]a,b]}$$

olduğundan, $\mathbb{R}$ nin ayrık iki açıktan oluşan bir örtüsü vardır.

Örnek 2.1.3. $\mathbb{R}$ alışılmış yapısıyla gözönüne alınsın. $\mathbb{R}$ nin

$$(Q, \mathfrak{U}_Q), (\mathbb{N}, \mathfrak{U}_{\mathbb{N}}) \text{ ve } (\mathbb{Z}, \mathfrak{U}_{\mathbb{Z}})$$

alt uzayları bağlantılı değildir.

Tanım 2.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer; A kümesi X den indirgenen topolojik yapısı ile bağlantılı ise, A kümesi, (X, τ) topolojik uzayının bağlantılı bir alt kümesidir denir.

Alt uzayda bağlantılılık, aşağıdaki önermeler yardımıyla da karakterize edilebilir.

Önerme 2.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler.

(i) A, (X, τ) topolojik uzayının bağlantılı bir alt kümesidir,

(ii) $A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$ ve $A \subset U \cup V$ koşulunu sağlayan $\forall U, V \in \tau$: $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ dir,

(iii) $A \cap F \neq \emptyset, A \cap K \neq \emptyset$ ve $A \subset F \cup K$ koşulunu sağlayan $\forall F, K \in \mathcal{F}$: $A \cap F \cap K \neq \emptyset$ dir.

İspat: $i \Rightarrow ii$ $A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$ ve $A \subset U \cup V$ koşulunu sağlayan $\exists U, V \in \tau : A \cap U \cap V = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. O halde, (A, τ_A) herbiri boş kümeden farklı olan ayrık iki açıktan oluşan bir örtüye sahiptir. Yani bağlantılı değildir.

$ii \Rightarrow i$ (A, τ_A) bağlantılı olmasın. O halde,

$$\exists U_A, V_A \in \tau_A, U_A \neq \emptyset, V_A \neq \emptyset : A = U_A \cup V_A \text{ ve } U_A \cap V_A = \emptyset$$

dir. $U_A, V_A \in \tau_A$ olduğuna göre;

$$U_A = U \cap A \text{ ve } V_A = V \cap A \text{olacak biçimde } \exists U, V \in \tau$$

vardır. Buradan

$$A \subset U \cup V \text{ ve } A \cap U \cap V = \emptyset$$

elde edilir.

(i) ile (iii) önermesinin denk olduğu benzer şekilde gösterilir.

Örnek 2.1.4. Herhangi bir topolojik uzayda, boş küme ve her tek elemanlı küme bağlantılı bir alt kümedir.

Örnek 2.1.5. (X, τ) bir Hausdorff uzayı olsun. X in birden fazla elemana sahip sonlu elemanlı alt kümeleri bağlantılı değildir. Daha genel olarak; bir topolojik uzayın birden fazla elemana sahip ve en az bir izole noktası olan herhangi bir alt kümesi bağlantılı değildir.

Örnek 2.1.6. $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ bağlantılı bir topolojik uzaydır.

İspat: $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ bağlantılı bir topolojik uzay olmasın. Bu durumda,

$$\exists A, B \in \mathfrak{U}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \ni X = A \cup B \text{ ve } A \cap B = \emptyset$$

dir. $a \in A$, $b \in B$ ve $a < b$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$$V = A \cap [a, b] \neq \emptyset \text{ ve } U = B \cap [a, b] \neq \emptyset$$

olur. A ve B hem açık hem kapalı alt kümeler olduğundan; U ve V kümeleri $(I = [a, b], \mathfrak{U}_I)$ alt uzayının kapalı alt kümeleri olur. Dolayısıyla, $\mathbb{R}$ den indirgenen yapılarıyla kompakt uzaylardır. O halde, $V \times U$ kümesi de $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir alt uzayıdır. $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı öklid metriği d ile gösterilsin. d süreklidir ve d nin $V \times U$ ya kısıtlaması da süreklidir. $V \times U$ kompakt olduğundan,

$$m = \inf \{d(x, y) \mid (x, y) \in U \times V\} \in d(U \times V)$$

olur. O halde,

$$\exists u \in U \text{ ve } \exists v \in V : d(u, v) = m$$

dir. $\delta = \dfrac{u+v}{2}$ alınırsa,

$$d(u, \delta) = m/2 \text{ ve } d(u, \delta) = m/2 \Rightarrow \delta \notin \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu çelişkiye $\mathbb{R}$ nin bağlantılı olmadığını kabul ederek düştük. O halde $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ bağlantılı bir topolojik uzaydır. (Bu ispat Prof. Dr. Mustafa Çiçek'in ders notlarından alınmıştır.)

Sonuç 2.1.1. Örnek 2.1.2 ve 2.1.6 gözönüne alındığında, bağlantılı topolojik uzay olma özelliğinin kalıtımsal bir özellik olmadığı açıkça görülür.

Teorem 2.1.1. Bağlantılılık topolojik bir özelliktir.

İspat: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. Bir an için (Y, τ') topolojik uzaynını bağlantılı olmadığını kabul edelim. O halde

$$\exists A, B \in \tau', A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \text{ için } Y = A \cup B \text{ ve } A \cap B = \emptyset$$

dir. f sürekli olduğundan

$$f^{-1}(A) \text{ ve } f^{-1}(B) \in \tau$$

ve f örten olduğundan

$$f^{-1}(A) \neq \emptyset \text{ ve } f^{-1}(B) \neq \emptyset$$

olur. Böylece X in ayrık iki açıktan oluşan bir örtüsü elde edilir. O halde, (X,τ) bağlantılı değildir. Benzer şekilde, (X,τ) bağlantısız ise, (Y,τ') topolojik uzayının da bağlantısız olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 2.1.2. Bağlantılı bir topolojik uzayın sürekli bir fonksiyon altında ki görüntüsü de bağlantılıdır.

Örnek 2.1.7. (X,τ) bir topolojik uzay, $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ sürekli ve birebir bir fonksiyon olsun. X birden fazla elemana sahip bir küme ise, X bağlantılı değildir. Biran için X in bağlantılı olduğunu kabul edelim. $\exists x, y \in X$ için, $f(x), f(y) \in f(X)$ ve $f(x) \neq f(y)$ dir. $f(X) \subset \mathbb{Z}$ olduğuna göre, $f(X)$ hem açık hem kapalı olacak biçimde bir öz alt kümesi bulunabilir. O halde, $f(X)$ bağlantılı değildir. Diğer yandan, kabulden X bağlantılı ve f sürekli olduğundan $f(X)$ de bağlantılı olmak zorundadır. Bu durumda bir çelişki elde edilir.