BÖLÜM 2

ELİPS ve BAZI KLASİK MEKANİK YASALARI

2.1 Elips hakkında genel bilgiler.

İki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların **geometrik** yerine elips denir. Aşağıdaki tarif ve gösterimler ezbere bilinmelidir.

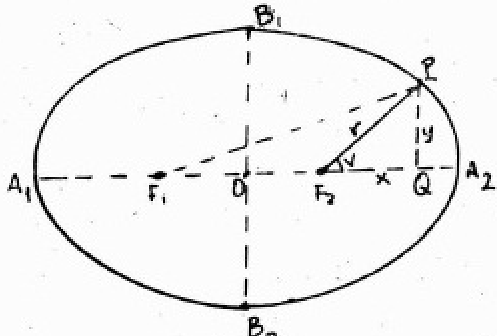
A_1A_2 : büyük eksen

B_1B_2 : küçük eksen

A_2 : F_2 odağına göre enberi noktası(*)

A_1 : F_2 odağına göre enöte noktası

$a = OA_1 = OA_2$: yarı-büyük eksen uzunluğu



$b = OB_1 = OB_2$: yarı-küçük eksen uzunluğu

$c = OF_1 = OF_2$: odak uzunluğu

A_2F_2 : F_2 odağına göre enberi uzaklığı

A_1F_2 : F_2 odağına göre enöte uzaklığı

---

* F_2 odağında Güneş bulunuyorsa enberi = perihel, enöte = afel

F_2 odağında Yer bulunuyorsa enberi = perige, enöte = apoge

F_2 odağında yıldız bulunuyorsa enberi = periastr, enöte = apoastr.

$a = \sqrt[3]{P^2}$ bize a yı, yâni gezegenin Güneşe olan uzaklığını, A.B. cinsinden verir.

2. Yer'in kütlesinin Güneşin kütlesine oranını bulunuz.

Çözüm:

Keplerin 3. Kanununu alalım:

$$\frac{a^3}{P^2} 4\pi^2 = G\ (M + m)$$

Yer – Güneş sistemi için $\dfrac{a^3_{\oplus}}{P^2_{\oplus}} 4\pi^2 = G(M_{\odot} + M_{\oplus})$

Ay-yer sistemi için $\dfrac{a^3_{☾}}{P^2_{☾}} 4\pi^2 = G\ (M_{\oplus} + M_{☾})$

Birbirine bölerek ve Yerin kütlesini Güneşinkine nazaran, Ayın kütlesini de yerinkine nazaran ihmal ederek.

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}} = \frac{P^2_{☾}}{P^2_{\oplus}} \quad \frac{a^3_{\oplus}}{a^3_{☾}} \quad \text{elde ederiz.}$$

Aşağıdaki değerleri kullanırsak $a_{\oplus} = 149674000$ km., $a_{☾} = 384400$ km. $P_{\oplus} = 365$ ortalama güneş günü, $P_{☾} = 28$ ortalama güneş günü

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}} = 329390 \text{ elde ederiz.}$$

3. Keplerin üçüncü kanunundan istifade ederek çift yıldızların kütlelerini güneşin kütlesi cinsinden bulunuz.

Çözüm: $G(M + m) = 4\pi^2 \dfrac{a^3}{P^2}$ yı evvelâ Güneş - Yer sistemine tatbik edelim.

$$G(M_{\odot} + M_{\oplus}) = 4\pi^2 \frac{a^3_{\oplus}}{P^2_{\oplus}} \qquad (1)$$

Şimdi, aynı formülü kütleleri M_1 ve M_2 olan Çift yıldız sistemine tatbik edelim.

$$G(M_1 + M_2) = 4\pi^2 \frac{a^3}{P^2} \qquad (2)$$

(2) yi (1) e bölerek

$$\frac{M_1 + M_2}{M_\odot + M_\oplus} = \frac{a^3}{P^2} \quad \frac{P^2_\oplus}{a^3_\oplus}$$

$M_\odot = 1$ alalım, $M_\oplus$ yı ihmal edelim, $a_\oplus = 1$ A. B ve $P_\oplus = 1$ yıl koyulursa

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{P^2} \text{ elde ederiz.}$$

İki yıldız arasındaki uzaklık olan a, Astronomi Birimi cinsinden ve birinin diğeri etrafındaki dolanma müddeti olan P, yıl cinsinden rasat edilirse $M_1 + M_2$, Güneşin kütlesi cinsinden elde edilir.

4. Kepler'in 1. ve 2. Kanunlarından istifade ederek gösteriniz ki gezegene tesir eden kuvvet $\frac{1}{r^2}$ ile orantılıdır.

Çözüm: $r^2 \dot{\Theta} = h \rightarrow \frac{d\Theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad \frac{d}{d\Theta}$

operatörünü elde ederiz.

Bu operatörü r ye iki defa tatbik edelim.

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad \frac{dr}{d\Theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\Theta}\right) = \frac{h}{r^2} \quad \frac{d}{d\Theta} \left(\frac{h}{r^2} \quad \frac{dr}{d\Theta}\right) = \frac{h^2}{r^4}$$

$$\frac{d^2r}{d\Theta^2} - \frac{2h^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2$$

Bunlar yardımiyle $a_r = \ddot{r} - r\dot{\Theta}^2 = \frac{h^2}{r^4} \quad \frac{d^2r}{d\Theta^2} - \frac{2h^2}{r^5} \quad \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - \frac{h^2}{r^3}$

$$= \frac{h^2}{r^3} \left[\frac{1}{r} \quad \frac{d^2 r}{d\Theta^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - 1 \right]$$

Diğer taraftan $r = \frac{p}{1 + e \cos\Theta}$ dan türev olarak

$$\frac{dr}{d\Theta} = - \frac{pe \sin\Theta}{(1 + e \cos\Theta)^2} = \frac{er \sin\Theta}{1 + e \cos\Theta}$$

$$\frac{d^2r}{d\Theta^2} = \frac{d}{d\Theta}\left[\frac{re\sin\Theta}{1+e\cos\Theta}\right]$$

$$= \frac{\left[\frac{dr}{d\Theta} e\sin\Theta + re\cos\Theta\right]\left[1+e\cos\Theta\right] + re\sin\Theta\ \sin\Theta}{(1+e\cos\Theta)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{er\ \sin\Theta}{1+e\cos\Theta}\ e\sin\Theta + er\cos\Theta\right)\left(1+e\cos\Theta\right) + re^2\sin^2\Theta}{(1+e\cos\Theta)^2}$$

$$= \frac{er\ \sin^2\Theta}{(1+e\cos\Theta)^2} + \frac{er\ \cos\Theta}{1+e\cos\Theta} + \frac{e^2r^2\ \sin^2\Theta}{(1+e\cos\Theta)^2}$$

Bunları a_r de yerlerine koyarsak

$$a_r = \frac{h^2}{r^3}\left(\frac{e\cos\Theta}{1+e\cos\Theta} - 1\right) = \frac{h^2}{r^3}\left(\frac{-1}{1+e\cos\Theta}\right) = -\frac{h^2}{r^3}\ \frac{r}{p}$$

$= \left(-\frac{h^2}{p}\right)\ \frac{1}{r^2}$ elde edilir, yâni $\frac{1}{r^2}$ ile orantılıdır.

2.4 Newton hareket kanunları.

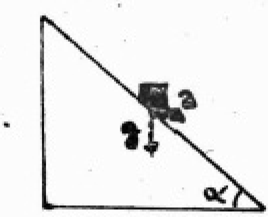
Kepler kanunları sadece gezegenlerin hareketlerini incelemekte, fakat bu hareketi meydana getiren kuvvetle hareket arasındaki bağıntıları göz önüne almamaktadır. Newton (1642-1727), bu ikinci hali ele almıştır. Newton'un üç hareket kanunu, dinamiğin prensipleri adı verilen aksiyomlardır. Newton bu aksiyomları, yer yüzünde yapılmış çok dikkatli deneylerden –özellikle Galile'nin deneylerinden– istifade ederek bulmuştur.

1. Bir cisim, durumunu değiştirecek bir kuvvetin tesiri altında kalmadıkça, atalet haline veya düzgün doğrusal hareketine devam eder.

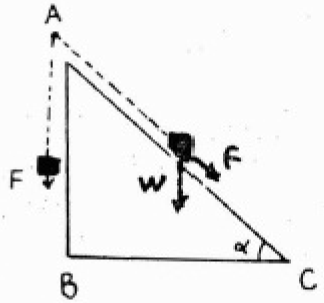
Atalet (inertia) kanunu diye tanınan bu kanun ilk vaz edildiği zaman, düzgün doğrusal haraket için cisme sabit bir kuvvet tesir etmelidir diye düşünen zamanın bilginleri arasında aksi tesir uyandırmıştı. Üstelik günlük deneylere de uymuyordu öyle ki, yatay doğrultuda atılan her cisim yavaşlıyor ve nihayet duruyordu. Bu cismin düzgün doğrusal hareket etmesi için ona devamlı olarak bir kuvvetin etki etmesi şarttı. Fakat sürtünme ve hava direncini, mümkün olduğu kadar, azaltarak yapılan deneyler yukarıki kanunun doğru olduğunu göstermiştir.

2. Hareket eden bir cismin ivmesi, hareketi meydana getiren kuvvetle doğru orantılı ve onunla aynı doğrultudadır.

Bu kanun düşen cisimlerle yapılan deneylerle elde edilmiştir. Düşme zamanı eşit aralıklara bölünmüş, bu aralıklardaki ivmelerin sabit ve birbirlerine eşit oldukları tesbit edilmiştir. Bu sabit ivmeye yer çekim ivmesi denir ve g ile gösterilir. (Gerçekte g nin değeri tam sabit değildir; enlemle büyür ve deniz seviyesinden yükseldikçe azalır, fakat bu değişim çok azdır). Düşen cisimlerin hızını azaltmak ve böylece kısa zaman aralıklarının ölçülmesini kolaylaştırmak için eğik bir düzlem üzerinden düşmekte olan bir cisim alalım. Deneyler gösteriyor ki bu hareket de sabit bir ivmeyle olmaktadır. α açısını değiştirerek düzgün ivmeli hareketin bir çok hallerini böylece inceliyebiliriz. Sürtünmeyi mümkün olduğu kadar azaltırsak, eğik düzlemde hareket eden cismin a ivmesi ile serbest düşmekte olan cismin g ivmesi arasında $a = g \sin \alpha$ bağıntısının olduğu görülür. Açıkça görülüyorki $\alpha = 90°$ ise $a = g$, yâni serbest düşme hali; ve $\alpha = 0°$ ise $a = 0$, yâni ivmesi sıfır olan düzgün doğrusal hareket hali elde edilmektedir.



Şimdi de eğik düzlem üzerinde hareket etmekte olan cismin hareketini meydana getiren kuvveti inceliyelim. Deneyler gösteriyorki hareketi meydana getiren kuvvet cisme etki eden W yerçekim kuvveti olmayıp ondan daha küçük olan ve cismi eğik düzlem üzerinde dengede tutacak F kuvvetidir. Sürtünmenin olmadığı ideal halde F ile W arasında $F = W \sin \alpha$ bağıntısı mevcuttur.



İvme ve kuvvetler arasındaki bu bağıntıları birbirine bölerek $F = \frac{W}{g} a$ elde ederiz. Mekanikte $\frac{W}{g}$ yani bir cismin ağırlığının yerçekim ivmesine bölümüne o cismin kütlesi denir ve m ile gösterilir. Böylece ikinci kanun

$F = ma$ şekline girer. Bu ifadeye hareket denklemi adı verilir.

3. İki cismin birbirlerine yaptıkları karşılıklı etkiler eşit ve zıt yönlüdür.

Kuvvetlerin mevcut olduğu her yerde bu kanun muhakkak hatırlarda olmalıdır. Örneğin: Yer, Ay üzerinde nekadar bir çekim meydana getiriyorsa Ay da Yer üzerinde aynı çekimi husule getirmektedir. Bunu yeryüzünde hissetmememizin yegane nedeni Yer kütlesinin Ay kütlesinden seksen defa daha büyük olmasıdır.

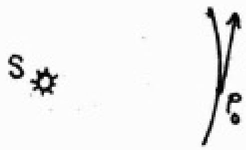
2.5 Newton genel çekim kanunu.

Herkes bilirki bütün cisimler yerçekim kuvvetinden dolayı yere düşer. Hiçbir şekilde desteklenmiyen her maddesel cisim yere düşecektir. Diğer taraftan, Kopernik ve taraftarları Yer'in de diğer gezegenler gibi Güneş etrafında dolanan bir gezegen olduğunu göstermişlerdir. O halde diğer gezegenlerin yakınına bırakılacak bir cisim de onların yüzeyine düşecek, yâni onlar tarafından çekileceklerdir. Bu da şunu gösteriyor; çekim özelliği yalnız Yer'e ait değil bütün gök cisimlerine ait müşterek bir özelliktir. Böylece, çekim özelliğinin diğer gök cisimlerine teşmili ile bu cisimler arasındaki karşılıklı çekim problemi ortaya çıkmıştı.

Diğer taraftan, Güneş Sisteminde Kopernik ve Kepler tarafından keşfedilen özellikler gösteriyorduki, Güneş merkezde olarak gezegenlerin hareketlerinde belirli bir rol oynuyordu. Keplerin kendisi de gezegen hareketlerinin Güneş tarafından idare edildiğine inanıyordu. "iki ayrı cisim bir miknatis gibi birbirine yaklaşmak ister" diyerek gravitasyon (çekim) üzerinde doğru görüşler ortaya atmıştı. Keplere göre çekim gezegen hareketlerinde büyük önemi haizdi ve gezegenleri Güneş etrafında tutuyordu.

Newton'un üç hareket kanunu, yeryüzeyinde, yersel şartlar altında yapılan deneylerle elde edilmişti. Fakat Newton hiç şüphe etmeden bu kanunların göksel cisimler için de muteber olduğunu kabul etmiş ve bu kanunları gök cisimlerine de uygulamıştır.

P gezegeninin S Güneşi etrafındaki yörüngesinin küçük bir kısmını alalım. Belirli bir anda gezegenin yeri P_o olsun. Eğer gezegene hiç bir kuvvet etki etmeseydi Newtonun birinci hareket kanunundan dolayı gezegen P_o daki hızıyla bir doğru boyunca (okla gösterilen) düzgün hareket edecekti. Bu hareket yörüngeye bu noktada teğet olacaktır. Fakat, mademki gezegen bir eğri boyunca hareket etmektedir, o halde onu doğrusal hareketten saptıran bir kuvvetin etkisi altındadır. Gezegenin bir doğrudan olan sapması daima Güneşe doğru olduğuna göre ona etki eden kuvvet te Güneşe doğru olmalıdır. Newton böylece gezegenlere etki eden kuvvetin Güneşten ileri geldiğini tesbit ettikten sonra, bu kuvvetin Güneşten olan uzaklıkla nasıl değiştiğini araştırmaya başladı ve hesapları ile gösterdiki bir maddesel cismin çizdiği eğri, bir odağı çekim merkezi olan bir elips ise, bu merkezin çekim kuvveti uzaklığın karesi ile ters orantılıdır. Diğer taraftan bu çekim kuvvetinin çeken cismin kütlesiyle doğru orantılı olduğu da açıktır. Sonuç olarak şimdi Newton'un meşhur genel çekim kanununu ifade edebiliriz:



"Uzayda her maddesel partikül diğer bir partikülü kütlelerinin çarpımıyla doğru ve aralarında ki uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak çeker."

Bu kanununun matematiksel ifadesi ise $F = G \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ şeklindedir. Burada F iki cisim arasındaki çekim kuvveti, m_1 ve m_2 cisimlerin kütleleri, r aralarındaki uzaklık ve G de seçilen kütle, uzunluk ve zaman birimlerine bağlı bir sabit olup genel çekim sabiti adını alır. Kanunun, içindeki kütle dağılımı homojen olan küresel cisimler halinde, keza dağılım homojen olmasa bile aralarındaki uzaklığın çok büyük olduğu hallerde de uygulanabileceği yine Newton tarafından ispat edilmiştir.

2.6 c. g. s. birimler sistemi.

Mekanikte, kullanılan birimlerin tesbiti çok önemlidir. Uzunluk, kütle ve zaman esas kemiyetler olarak seçilir. Uzunluk birimini cm., kütle birimini gr. ve zaman birimini de saniye olarak alırsak c. g. s. birimler sistemini elde ederiz. Diğer bütün fiziksel kemiyetler bunlar cinsinden ifade edilebilirler. Gram, bir cm^3 suyun $+4°$ deki kütlesi olarak tarif edilir. Bir cismin ağırlığı yerden yere değişebilir, fakat kütlesi her yerde aynıdır. Kütlesi m olan bir cismin yeryüzündeki ağırlığı W ise $m = \dfrac{W}{g}$ dir. Aynı cisim Ay yüzeyine getirilirse ağırlığı W☾ (daha hafif) olacaktır. Fakat Ay çekim ivmesi g☾ de aynı oranda daha küçük olduğundan $m = \dfrac{W☾}{g☾}$ aynı kalır. Dolayısıyla, mekanikte bir cismin ağırlığı değil ve fakat kütlesi esas kemiyet olarak alınır.

Şimdi mekanikte kullanılan diğer kemiyetlerin c. g. s. sistemindeki boyutlarını bulacağız:

Hız : Yolun zamana göre değişim derecesi olduğuna göre c. g. s. boyutu cm./san.

İvme : Hızın zamana göre değişim derecesi olduğuna göre c. g. s. boyutu cm./san.^{2}

Kuvvet : Birimi din yâni bir gr. kütle üzerinde 1 cm/san^2 lik ivme meydana getiren kuvvet olduğuna göre c. g. s. boyutu gr. cm./san.^{2}

Boyut analizi, formüllerin doğru olup olmadıklarını kontrol etmekte çok faydalıdır. Öyle ki, bir formülün her iki yanında bulunan kemiyetlerin c. g. s. boyutları yerlerine konduğu zaman her iki taraf birbirine eşit çıkmıyorsa bu formülün yanlış olduğunu söyliyebiliriz.

2.7 Problemler.

1. G genel çekim sabitinin sayısal değerini c. g. s. ve astronomik birimler sisteminde bulunuz:

Çözüm:

Kepler 3. ten $G = \dfrac{4\,\pi^2\,a^3}{P^2\,(M + m)}$ dir. Yer - Güneş sistemine uygulayalım:

1°. c. g. s. sisteminde

$$a = 1{,}4967 \times 10^{13} \text{ cm.}$$
$$P = 3{,}1558 \times 10^{7} \text{ san.}$$
$$M\odot = 1{,}9910 \times 10^{33} \text{ gr.}$$
$$m\oplus = 5{,}9770 \times 10^{27} \text{ gr.}$$

Bu değerler yukarıda yerlerine koyulur ve kısaltılırsa

$G \;=\; 6{,}67 \times 10^{-8}\ cm^3\ /\ gr.\ san^2$ elde edilir.

2° Astronomik birimler sisteminde

$$a = 1$$
$$M = 1$$
$$m = \frac{1}{329390}$$
$$P = 365{,}256 \text{ Ort. Güneş Günü}$$

Bu değerler yerlerine koyulur ve kısaltılırsa

$G = 0{,}0002959122$ elde edilir. Bu halde, bazan G yerine k^2 kullanılır. O zaman $k = 0{,}0172020989$ olur ve Gauss sabiti adını alır.

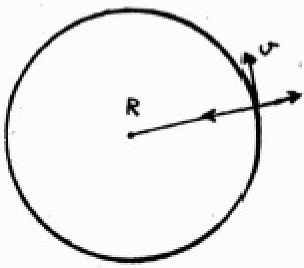
2. Kepler'in 3. üncü kanununu dairesel yörünge için çıkartınız.

Çözüm:

Dairesel yörüngede hız: $v = \dfrac{2\pi R}{P}$

Dairesel yörüngede merkezkaç kuvvet: $\dfrac{m\,v^2}{R} = \dfrac{4\pi^2 mR}{P^2}$

Dairesel yörüngede Newton çekim kuvveti: $G\ \dfrac{mM}{R^2}$



Merkezkaç kuvvet = Newton çekim kuvveti olduğundan

$$\frac{4\pi\ mR}{P^2} = G\ \frac{mM}{R^2}$$

buradan

$$\frac{R^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{(sabit) elde edilir.}$$

3. g yerçekim ivmesinin sayısal değerini c. g. s. sisteminde bulunuz.

Çözüm: Newtonun 2. inci ($F = ma$) ve genel çekim $\left(F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\right)$ kanununu yeryüzüne yakın bir uzaklıktan düşmekte olan bir m kütlesine uygulayalım: $m_1 = m$, $m_2 = M$ (Yerin kütlesi), $r = R$ (Yerin yarıçapı) ve $a = g$ olduğundan $F = mg$ ve $F = G\,\frac{mM}{R^2}$ elde ederiz. Buradan

$mg = G\,\frac{mM}{R^2}$ buradan da $g = \frac{GM}{R^2}$ elde ederiz. Değerler yerlerine koyulur ve kısaltılırsa

$$g \simeq 981 \ \text{cm/san}^2 \quad \text{bulunur.}$$

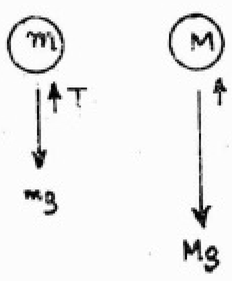
4. Aynı hacımda ve şekilde fakat değişik kütleli iki m ve M ($m < M$) kürelerine tesir eden hava direnci T dir. Bu iki kütleden ağır olanının daha büyük hızla düşeceğini gösteriniz.

Çözüm. m ye etki eden kuvvet $mg - T$

M ye etki eden kuvvet $Mg - T$

m nin düşme ivmesi a_1 ve M nin düşme ivmesi a_2 olsun

$$mg - T = ma_1 \ (\text{m nin hareket denklemi})$$
$$Mg - T = Ma_2 \ (\text{M nin hareket denklemi})$$



Bu denklemlerden $m(g-a_1) = M(g-a_2)$ buradan da $\frac{g-a_1}{g-a_2} = \frac{M}{m} > 1$ elde ederiz. Bunun sağlanması içinse $a_2 > a_1$ olmalıdır. İvmesi büyük olan hareketinse daha hızlı olacağı aşikardır.

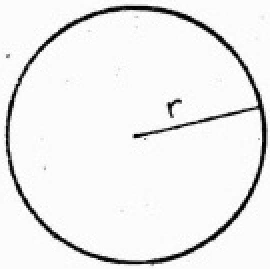
Özel hal: eğer atmosfer yok ise $T = O$ dır. Dolayısıyla $a_1 = a_2$ olur. Yani her iki cisim aynı anda düşerler.

5. Ay'ın Yer etrafındaki hareketini dairesel kabul ederek bu hareketin ivmesinin, bu uzaklıktaki yerçekim ivmesine eşit olduğunu gösteriniz.

$$v = \frac{2\pi r}{P☾} = \frac{2 \times 3{,}14 \times 3{,}8 \times 10^{10}}{23328 \times 10^{2}} = 0{,}102 \times 10^{6} \text{ cm/san}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = 0{,}27 \quad \text{cm/san}^2$$

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6{,}7 \times 10^{-8} \times 5{,}9 \times 20^{27}}{(3{,}8 \times 10^{10})^2} = 0{,}27 \text{ cm/san}^2$$

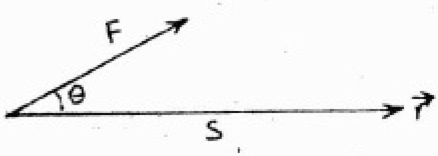


2.8 İş.

Bir kuvvetin etkisi altında bir cisim yer değiştiriyorsa yapılan iş İŞ = KUVVET x YOL olarak tarif edilir. İki hal vardır.

1°. F kuvveti sabittir: Bu halde yer değiştirme bir doğru boyunca olur. Eğer s yolu katediliyorsa s ile F nin aynı doğrultuda olması halinde iş $W = Fs$, ve aralarında Θ açısı yapmaları halinde iş $W = Fs\cos\Theta$ dır

Her iki halde $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$ bağıntısıyla ifade edilebilir. Burada r mutlak değeri s olan vektördür.



2°. F kuvveti sabit değildir: Bir (xy) Dik Koordinat Sistemi alalım. Her x, y noktasında F kuvveti değişsin, yani $F = F(x, y)$, Şimdi bir cismin bu kuvvet alanının etkisiyle A dan B ye geldiğini kabul edelim. Yapılan işi bulmaya çalışacağız. Bunun için AB eğrisini n eşit parçaya

$e = \dfrac{c}{a}$ dışmerkezlik (eksantrisite)

r : F_2 odağından elipsin herhangi bir noktasına giden vektör

v : gerçek anomali – r nin enberi doğrultusuyla yaptığı açı (*)

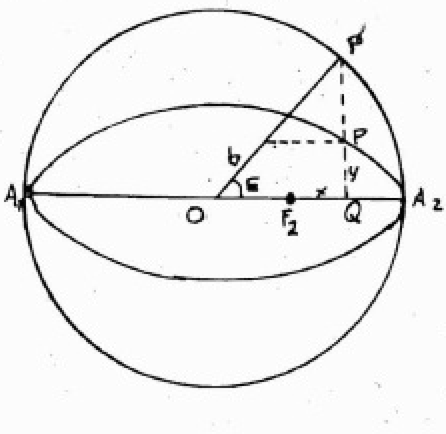
F_2 merkezli (r, v) kutupsal koordinat sisteminde elipsin denklemi F_1PQ üçgeni yardımıyla bulunur. $\overline{F_1Q}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{F_1P}^2$ bağıntısından $F_1Q = 2ae + r\cos v$, $PQ = r\sin v$ ve $F_1P = 2a - r$ koyulursa

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}$$ denklemi elde edilir

$v = 90°$ iken $r = a(1 - e^2) = p$: elipsin parametre uzunluğu kullanılırsa elipsin kutupsal denklemi olarak

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$ elde edilir.

Büyük eksen uzunluğu 2a olan bir elips, 2a çaplı bir çenber yardımıyla da elde edilebilir. Bunun için çenberin herhangi bir A_1A_2 çapı alınır. Çenber üzerindeki herhangi bir noktadan A_1A_2 ye bir dikme indirilir. OP′ üzerinde O dan itibaren b uzunluğu alınıp A_1A_2 ye bir paralel çizilir. Bunun P′Q yü kestiği nokta elipse ait bir noktadır.

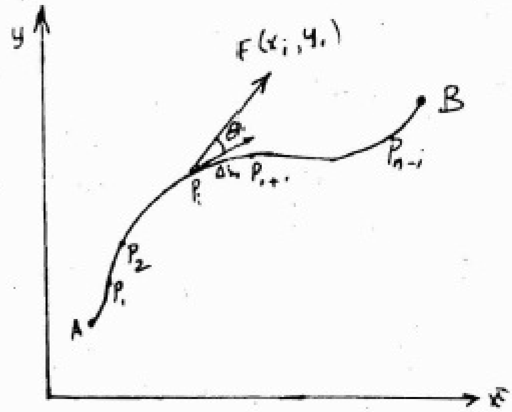


$A_2OP' = E$ olsun. Bu açıya eksantrik anomali adı verilir. P nin F_2 merkezli Dik Karteziyen Koordinatları

$x = a(\cos E - e)$

* Anomali sözcüğü gök mekaniğinde, hareket eden bir cisim enberi noktasına geldiğinde sıfır olan açı anlamında kullanılır.

bölelim. i - inci nokta P_i, buradaki kuvvet $F(x_i, y_i)$, $P_iP_{i+1} = \Delta si$ ve kuvvetle Δs_i arasındaki açı Θ_i olsun. $F(x_i, y_i)$ nin P_i de eğriye teğet doğrultudaki bileşeni $F(x_i, y_i) \cos\Theta_i$ ve cismin P_i den P_{i+1}'e gelmekle yaptığı iş yaklaşık olarak $F(x_i, y_i) \cos\Theta_1 \triangle s_i$ dir. Dolayısiyla cismin A dan B ye gelmesiyle yapılan iş



$$W_{AB} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i) \cos\theta i \ \Delta s_i = \int_A^B F\cos\Theta \, ds \text{ olacaktır}$$

Bunu vektörel olarak $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$ şeklinde yazabiliriz. F nin

bileşenleri F_x, F_y ise $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$ dir. $\vec{dr} = dx\, \hat{i} + dy\, \hat{j}$ yi de kullanarak

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_A^B (F_x \, dx + F_y \, dy) \text{ elde ederiz.}$$

İş birimi erg'dir. Erg, 1 din'lik bir kuvvetin uygulandığı noktayı kendi doğrultusunda 1 cm. götürmekle yaptığı iştir. Dolayısiyle iş'in c. g. s. boyutu gr. cm^2. / san^2 olur.

2.9 Bir kuvvet alanının potansiyeli.

Üç boyutlu (x,y,z) Dik Koordinat Sisteminde $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ vektör alanını göz önüne alalım. Şimdi yine bu uzayda öyle bir $V = V(x,y,z)$

fonksiyonu alalımki $\vec{F}$ ile V arasında aşağındaki bağıntı bulunsun

$$F = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right)$$

Bu taktirde V fonksiyonuna $\vec{F}$ kuvvet fonksiyonunun potansiyel'i denir. Vektörel analizde $\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ işlem - yapan'ı ∇ ile gösterilir. Bunu kullanarak

$\vec{F} = -\nabla V$ yazabiliriz. Böylece V nin gradient'i önüne eksi koyulunca $\vec{F}$ yi vermektedir *.

$$\vec{F} = -\,\mathrm{grad}\ V$$

Her kuvvet alanı için yukarıdaki şartı sağlayan bir V fonksiyonu bulmak mümkün değildir. Mümkün olan alanlara konservatif alanlar denir.

Şimdi konservatif alanlarda mevcut olan bazı özellikler göreceğiz.

$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,.\,\vec{dr}$ ifadesinde $\vec{F} = -\nabla V$ ve $\vec{dr} = \hat{\tau}\ ds$ koyalım

$W_{AB} = -\int_A^B \nabla V\ .\ \hat{\tau}\ ds$ olur.

Diğer taraftan
$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

$$= \left(\frac{dx}{ds}\hat{i} + \frac{dy}{ds}\hat{j} + \frac{dz}{ds}\hat{k}\right).$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$= \hat{\tau}\ .\ \nabla V$$

yukarıda yerine koyarak

$$W_{AB} = -\int_A^B \frac{dV}{ds}\,ds = -\int_A^B dV = -\left.\middle|\, V\ \right|_A^B = V_A - V_B$$

elde ederiz. Burada V_A, potansiyel fonksiyonunun A noktasındaki de-

---

* ∇ işlem-yapan'ı nabla veya del diye adlandırılır. Bunun bir skaler fonksiyona uygulanmasıyla gradient, bir vektörel fonksiyonla skaler çarpımı diverjans ve vektörel çarpımıyla da körl (rotasyon) elde edilir.

ğeri, V_B de B noktasındaki değeridir. Buradan aşağıdaki özellikler çıkar:

1°. Konservatif bir alanda A dan B ye giden bir cismin yaptığı iş, A ve B noktalarındaki potansiyel farkına eşittir.

2°. Konservatif bir alanda A dan B ye giden bir cismin yaptığı iş yola bağlı olmayıp sadece yolun uç noktalarına bağlıdır.

$V = V(x,y,z)$ fonksiyonu genel olarak uzayda bir hacim temsil eder. Şayet $V(x,y,z) =$ sabit alırsak bu bir yüzey olur. Bu yüzeye eş potansiyel yüzey denir. Böyle bir yüzeyde bir cismin bir noktadan diğer bir noktaya gitmesiyle yapılan iş sıfıra eşittir.

2.10 Yer çekim potansiyeli.

Evvelâ yer çekim alanının konservatif bir alan olduğunu göstereceğiz. Newton Genel Çekim Kanununu, yer çekim alanındaki bir birim kütle için yazalım.

$$F = G \frac{M}{r^2}$$

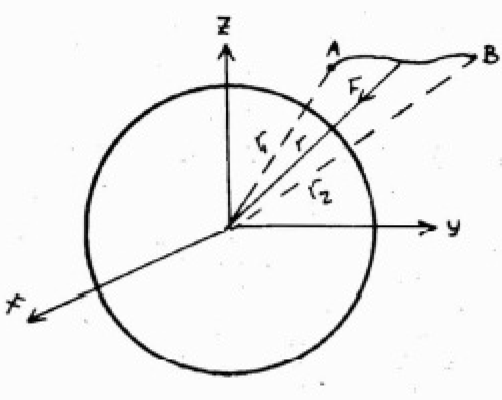
Burada M yerin kütlesi, r ise yer merkezinden birim kütleye giden yoldur.

Yer merkezli xyz dik koordinat sisteminde F nin bileşenleri.

$$F_x = F \cos(x, r) = - G \frac{M}{r^2} \frac{x}{r}$$

$$F_y = F \cos(y, r) = - G \frac{M}{r^2} \frac{y}{r}$$

$$F_z = F \cos(z, r) = - G \frac{M}{r^2} \frac{z}{r}$$



F merkeze doğru olduğundan xyz nin pozitif yönlerindeki bileşenlerinin başına negatif işaret konmuştur.

Bunları $W_{AB} = -\int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ de yerlerine koyalım

$$W_{AB} = -\int_A^B \frac{GM}{r^3} (xdx + ydy + zdz)$$

Fakat $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ dolayısiyle $dr = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{r}$ ve bunun yardımıyla da

$$W_{AB} = -GM \int_A^B \frac{dr}{r^2} = GM \left| \frac{1}{r} \right|_A^B \text{ elde edilir.}$$

Merkezden A ve B ye giden uzunluklar r_1 ve r_2 ise

$$W_{AB} = GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

O halde yapılan iş sadece yolun uç noktalarına bağlıdır. Dolayısiyle de yer çekim alanı konservatif bir alandır. Yukarıdan yer çekim potansiyelinin $V = \dfrac{GM}{r}$ olduğu görülür. Zaten $\dfrac{GM}{r}$ nin gradientini alırsak görürüz ki F ye yani $\dfrac{GM}{r^2}$ ye eşit çıkmaktadır. Zira,

$$\vec{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \quad , \quad V = \frac{GM}{r}$$

$$= -\left(\frac{\partial \frac{GM}{r}}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \frac{GM}{r}}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \frac{GM}{r}}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$= -GM\left[\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r}\hat{i} + \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{y}{r}\hat{j} + \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{z}{r}\hat{k}\right]$$

$$= \frac{GM}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \frac{GM}{r^3}\vec{r} = \frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

Buradan $F = \dfrac{GM}{r^2}$ elde edilmektedir.

Potansiyel fonksiyonunun A daki değeri $V_A = \dfrac{GM}{r_1}$ ve B deki değeri $V_B = \dfrac{GM}{r_2}$ olduğundan birim kütlenin A dan B ye gitmesiyle yapılan iş $V_A - V_B$ olmaktadır. Eğer birim kütle A dan sonsuza giderse $r_2 \rightarrow \infty$ ve yapılan iş $W = -\dfrac{GM}{r_1}$ dir. Yâni A daki potansiyele eşittir (Eksi işareti, birim kütlenin yer çekimine zıt yönde gitmesinden ileri gelmektedir). O halde bir noktadaki potansiyeli, birim kütleyi o noktadan sonsuza getirmekle yapılan iş olarak ta tarif edebiliriz.

Potansiyelin c. g. s. sistemindeki boyutu: Bir noktadaki potansiyel, birim kütleyi sonsuza getirmekle yapılan iş olduğuna göre boyutu, birim kütle başına iş olacaktır. İşin c. g. s. boyutu gr cm^2 / san^2. de kütleyi birim olarak alırsak potansiyelin boyutu cm^2 / san^2 çıkar. Zaten $V = G \dfrac{M}{r}$ den de $cm^3\ gr^{-1}\ san.^{-2} \times gr/cm \doteq cm^2 / san^2$. elde edilmektedir.

2.11 Enerji.

Bir cismin enerjisi diye o cismin iş yapma kabiliyetine denir. Skaler bir kemiyet olup birimleri iş birimlerinin aynıdır. İki türlü enerji tarif edilir.

1. Kinetik Enerji. Bir cismin hareket etmesinden dolayı haiz olduğu iş yapma kabiliyetidir. υ hızıyla hareket eden ve kütlesi m olan bir cismin kinetik enerjisi

$E_K = \frac{1}{2} m \upsilon^2$ bağıntısıyla verilir.*

m ve υ nin c. g. s. sistemindeki boyutları denklemin ikinci yanında yerlerine koyulursa E_K nın c. g. s. boyutu gr cm^2 / san^2. elde edilir ki bu da işin c. g. s. boyutudur.

$$* \int_A^B F.\, ds = \int_A^B m \frac{d\upsilon}{dt} \upsilon dt = m \int_A^B \upsilon d\upsilon = \left| \tfrac{1}{2} m\upsilon^2 \right|_A^B$$

$$= \frac{m}{2}(\upsilon_B^2 - \upsilon_A^2) = \text{A dan B ye gitmekle yapılan İş} = \text{Kin. En.}$$

Eğer A da hız $\upsilon_A = 0$, B de $\upsilon_B = \upsilon$ ise B deki kinetik enerji $E_k = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ olur.

$y = b\sin E = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$ dir. Bu değerler $r^2 = x^2 + y^2$ de yerlerine koyulur ve kısaltılırsa

$r = a\,(1 - e\cos E)$ elde edilir.

Daire ve elips üzerindeki bütün noktalar için $\dfrac{P'Q}{PQ} = \dfrac{a}{b}$ olduğuna göre elipsin alanı dairenin alanının bu orandaki iz düşümü olacaktır. O halde

$$\frac{A_D}{A_E} = \frac{\pi\, a^2}{A_E} = \frac{a}{b} \text{ buradan } A_E = \pi\, ab \text{ elde edilir.}$$

Elde edilen bütün bu bağıntılar ileride yeri geldikçe kullanılacaktır.

Not: Hiperbol ve parabol için yukardakilere benzeyen özelliklerin tesbiti okuyucuya bırakılmıştır.

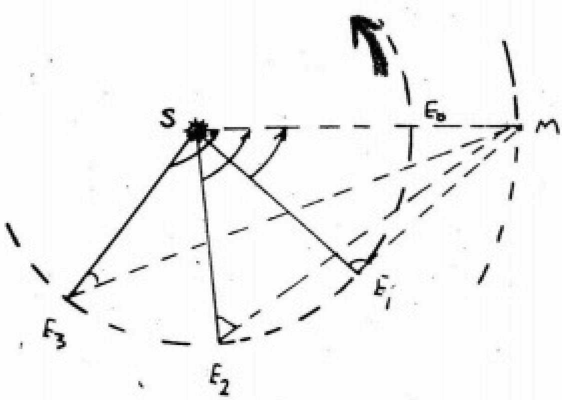
2.2 Kepler kanunları

16 ıncı yüz yılın sonlarına kadar gök cisimlerinin hareketlerinde eliptik yörüngelerin adı hiç geçmemiştir. Bilindiği gibi ilk olarak Kopernik (1473-1543), tam on dört asır rakipsiz kalmış olan Batlamyus Sistemini yıkmıştır. Batlamyus Sisteminde Yer sabittir ve Güneş, Ay ve gezegenler Yer'in etrafında dolanmaktadırlar. Koperniğe göre ise, Güneş sabit olup Merkür, Venüs, Yer, Mars, Jüpiter ve Satürn gezegenleri (16 ıncı asırda Uranüs, Neptün ve Plüton bilinmemekteydi) Güneş etrafında bir daire üzerinde dolanmaktadırlar. Güneş bu dairelerin tam merkezinde olmayıp biraz merkez dışı bir yer işgal etmektedir. Kopernik aynı zamanda bu gezegenlerin Güneşe olan uzaklıklarını ve Güneş etrafındaki dolanma müddetlerini de hesap etmiştir.

Kopernikten sonra, astronomlar Kopernik Sisteminin geçerlilik derecesini tesbit etmek için sistematik bir şekilde çalışmaya başladılar. Bu arada Galile (1564-1642) ve Tycho Brahe (1546-1601) nin çalışmalarından bahsetmek yerinde olur. Galile Yer'in kendi ekseni etrafında döndüğünü ispatlamış; 1610 da, astronomi tarihinde ilk olarak göklere bir teleskop yöneltmiş ve böylece astronomik araştırmalar için hayal bile edilemiyeek bir çığır açmıştı. Tycho ise çok iyi bir gözlemci idi ve özellikle Mars gezegeninin bol sayıda ve çok hassas gözlemlerini yapmıştı. Bu bilgilerle mücehhez olan Kepler (1571-1630) gezegenlerin hareketlerini ayrıntılı bir şekilde incelemeye koyuldu. İşe Mars'la başladı:

Marsın gökyüzünde görünen hareketi, hem kendisinin ve hem de Yerin hareketinden ileri geldiğinden, önce Yerin hareketini bilmek gerekiyordu. Dolayısıyla Kepler, önce Yerin hareketini inceledi. Aşağıda Onun hesaplarını veriyoruz.

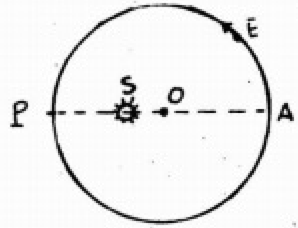
Farzedelimki Mars Karşı konum'u (opozisyon'u) takiben bir ve bir kaç yörünge periyodu aralıklarla gözlenmiştir. O zaman Mars, yörüngesi üzerinde hep aynı yerde gözükecek, Yer ise çeşitli yerler işgal edecektir. Şekilde M Marsı, E_o, E_1, E_2, v. s. de Yer'i göstersin. Eğer Yer ilk gözlemde E_o da ise, 687 gün (Marsın dolanma müddeti) içinde iki devir yapamayacak ve E_1 de, diğer bir 687 gün sonra da E_2 de v. s. olacaktır.



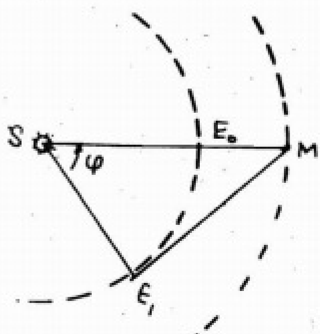
Ekliptik boyunca Güneşin hareketi Tycho Brahe tarafından incelenmişti. Dolayısıyla Keplerin elinde Güneşin Ekliptik üzerinde hergün nerede bulunacağını gösteren hassas tablolar mevcuttu. Böylece E_o SE_1, E_oSE_2, E_oSE_3, v. s. açıları Keplerce biliniyordu. Mars ile Güneş arasındaki SE_1M, SE_2M, SE_3M, v. s. açıları da gözlemle bulunabilirdi. Sonra, SME_1, SME_2, SME_3, v.s. üçgenlerinden (ki bu üçgenlerde bir kenar, SM, ortak ve sabit, ve iki açıları da bilinmektedir), SE_1, SE_2, SE_3, v. s. uzunlukları SM cinsinden tayin eilebilir ve çeşitli anlarda Yer'in durumuna tekabül eden noktalar şekle geçirilebilir. Bu noktaların birleştirilmesi ise Yer'in Güneş etrafındaki yolunu gösteren eğriyi verecektir.

Bu eğrinin bir daire, fakat Güneşin tam merkezde değil biraz farklı yerde olduğu bulunmuştur. Dairenin merkezi ile Güneşin bulunduğu yer arasındaki OS uzunluğu Keplere göre dairenin yarıçapının yaklaşık olarak 1/59 u kadardı. Bu çok küçük bir değerdir ve 10 cm. yarıçaplı bir dairede sadece 1,5 mm. ye tekabül eder.

Kepler keza, Yerin yörüngesi üzerinde düzgün hareket etmediğini tesbit etmiştir. Yer, Güneşe en yakın olduğu P noktası cıvarında, en uzak olduğu A noktası cıvarındakinden daha hızlı gitmekteydi. Bu çalışmayı tamamladıktan sonra Kepler Mars'ın yörüngesini ele aldı.



Yer ve Marsın opozisyondaki durumu E_o , M ve bir Mars periyodundan sonraki durumu E_1 , M olsun. Kepler φ açısı ve SE_1 uzunluğunu daha önce hazırlamış olduğu Yer hareket tablolarından elde edebiliyordu. SME_1 açısı ise gözlemlerle tayin edilmişti. Böylece SME_1 üçgeninden SM yi, yani Marsın Güneşe olan uzaklığını tayin etmek mümkündü. Bu şekilde Kepler, Marsın Güneşe olan uzaklığını yörüngenin çeşitli noktalarında tayin etmiş ve bu noktalardan geçen eğriyi bulmaya teşebbüs etmiştir. Uzun ve güç bir çalışmadan sonra Kepler, Mars yörüngesinin bir daire olamayacağı sonucuna varmıştır.



Böylece, asırlardanberi hakim olan "göksel hareketler sadece dairesel olabilir" fikri çürütülmüş oluyordu. Kepler sonra, bu noktalardan basık bir eğri çizmeye çalışmış ve uzun denemelerden sonra Marsın yörüngesinin bir elipsle temsil edilebileceğini bulmuştur. Kepler, bu elipsin dışmerkezliğini 1/11 olarak buldu. Yörüngenin yarı-büyük eksen uzunluğu ise Yer-Güneş uzaklığının 1,52 si idi. Güneş bu elipsin bir odağında bulunuyordu. Kepler sonra bu gezegenin hareketindeki diğer özellikleri incelemeye girişti. Güneşten bakıldığına göre perihel yakınlarında Marsın iki ayda 37°, aynı müddet içinde afel yakınlarında 26° yol aldığını tesbit etti. O halde Mars Güneşten nekadar uzakta ise o derece yavaş gidiyordu. Keza Mars, yörüngesi üzerindeki hareketi esnasında

M_1M_2, M_3M_4, v. s. yollarını eşit zamanlarda kat ediyorsa SM_1M_2, SM_3M_4, v. s. üçgenlerinin alanları eşit oluyordu.

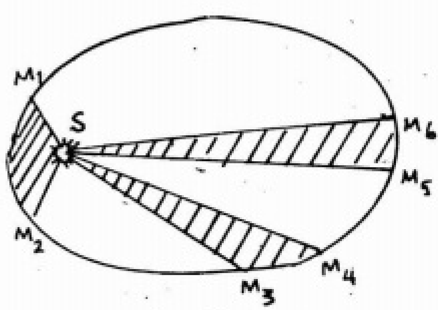
Kepler bu özelliği yerin yörüngesi için de keşfetmiş idi. O halde Yerin yörüngesi de bir elips olabilirdi. Güneşin Yer yörüngesinin merkezinde olmayıp yarıçapının 1/59 u kadar uzakta olduğunu söylemiştik. Bu, Yerin eliptik yörüngesinin dışmerkezliği olmalıydı. Dışmerkezliği bu kadar küçük olan bir elipsde yarı-büyük ve yarı-küçük eksen uzunlukları ancak 7 binde 1 fark eder. Kepler zamanında bütün gözlemler çıplak gözle yapılıyordu ve böyle bir elipsi daireden ayırmak zordu.

Sonradan Kepler diğer gezegenlerin yörüngelerini de tayin etmiş ve onların da elips olup yukarıdaki özellikleri sağladığını tesbit etmiştir.

Şimdi sıra bütün gezegenleri birbirine bağlıyan genel bir özellik aramaya gelmişti: Yer ve Marsın Güneşe olan ortalama uzaklıklarının oranı 1/1,52 dir. Bunların dolanma müddetlerinin oranı ise 1/1,88 dir. Birincinin kübünü ve ikincinin karesini alırsak yaklaşık olarak birbirine eşit çıkmaktadır. Kepler bu oranları bütün gezegenler için teşkil etti ve yukarıki özelliğin sağlandığını gördü.

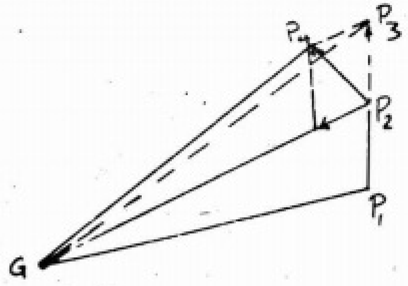
Böylece Kepler gezegenlerin hareketlerini ilgilendiren üç büyük özellik elde etmiş oluyordu. Kepler kanunları olarak bilinen bu özellikleri şimdi toplu bir şekilde verelim:

1. Bir gezegenin yörüngesi, odaklarının birinde Güneş bulunan bir elipstir.
2. Bir gezegen, yörüngesi üzerinde hareket ederken, gezegeni Güneşe birleştiren doğru eşit zamanlarda eşit alanlar tarar.
3. Gezegenlerin hareketlerinde yarı-büyük eksenlerin küplerinin, dolanma müddetlerinin karelerine oranı sabittir.



Şimdi bu kanunlaran ikincisinin geometrik bir ispatını vereceğiz:

Bir t anında Güneş G de, bir gezegen de P_1 de bulunsun. Birim zaman içinde G nin P üzerine hiç etki etmediğini kabul edelim. O zaman P_1 doğrusal bir hareketle P_2 ye gelecektir. Şimdi eğer güneş gezegene etki etmeseydi ikinci bir birim aralık sonunda gezegen P_3 e gelir ve $P_1P_2 = P_2P_3$ olurdu. P_2 de iken aniden Güneş gezegeni kendisine çekerse gezegen P_4 e gelir. Şimdi gösterelim ki GP_1P_2 ve GP_2P_4 üçgenlerinin alanları eşittir. Yâni eşit zamanlarda eşit alanlar taranmıştır.



$GP_1P_2 = GP_2P_3$ dir, zira taban ve yükseklikleri eşit

$GP_2P_3 = GP_2P_4$ dir, zira tabanları aynı yükseklikleri eşit.

Buradan $GP_1P_2 = GP_2P_4$ elde edilir.

İkinci kanundan bazı önemli sonuçlar çıkarılabilir:

$$\Delta A = \frac{r\,r'}{2}\sin\Delta\Theta, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{rr'\sin\Delta\Theta}{2\,\Delta\Theta}\,\frac{\Delta\Theta}{\Delta t} \text{ buradan}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\Theta}{dt} \qquad \left(\text{limit halde } \frac{\sin\Delta\Theta}{\Delta\Theta} = 1 \text{ ve } r = r'\right)$$

İkinci kanuna göre $\dfrac{dA}{dt}$ sabittir.

O zaman

$$r^2\,\frac{d\Theta}{dt} = h \text{ (sabit)}$$ elde edilir. Bunun zamana göre türevini alalım:

$2\dot{r}\dot{\Theta} + r\ddot{\Theta} = 0$ buluruz. Bu ise, hareketin teğetsel ivmesidir ve sıfıra eşittir. O halde gezegenlerin hareketlerinde sadece radyal ivme mevcuttur. Bu da, gezegene tesir eden kuvvetin Güneş doğrultusunda olduğunu gösterir.

Problem 4 de, Kepler'in bir ve ikinci kanunları yardımıyla, gezegene tesir eden kuvvetin aynı zamanda $\frac{1}{r^2}$ ile de orantılı olduğu gösterilecektir.

Kepler'in üçüncü kanunu $\frac{a_1^3}{P_1^3} = \frac{a_2^3}{P_2^2} = \ldots = \frac{a^3}{P^2}$ = sabit.

şeklindedir. Burada 1 indisi bir no. lu gezegeni, 2 indisi iki no.lu gezegeni nihayet indissiz harfler de her hangi bir gezegeni temsil eder.

Şimdi göstereceğiz ki bu oran Kepler'in dediği gibi tam bir sabit değil, fakat gezegenden gezegene pek az miktarda değişmektedir.

$r^2\dot{\Theta} = h \rightarrow \frac{d\Theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \rightarrow d\,t = \frac{r^2}{h}\,d\Theta$ integre ederek

$$\int_0^P dt = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{h}\,d\Theta \rightarrow P = \frac{2}{h}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\,r^2\,d\Theta$$

Diğer taraftan $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,r^2\,d\Theta = \pi\,ab$ (Elipsin alanı). Dolayısiyle

$P = \frac{2}{h}\,\pi\,a\,b$ elde ederiz. Bu değeri $\frac{a^3}{P^2}$ de yerine koyalım

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{a^3}{\frac{4}{h^2}\,\pi^2 a^2 b^2} = \frac{h^2}{p}\,\frac{1}{4\,\pi^2}$$ Burada $p = \frac{b^2}{a}$ (elipsin parametre uzunluğu). İleride gösterilecektir ki $h^2 = G(M+m)\,p$ dir. Burada G genel çekim sabiti, M Güneşin, m gezegenin kütlesidir.

Bunlar yardımıyla $\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M+m)}{4\,\pi^2}$ elde ederiz.

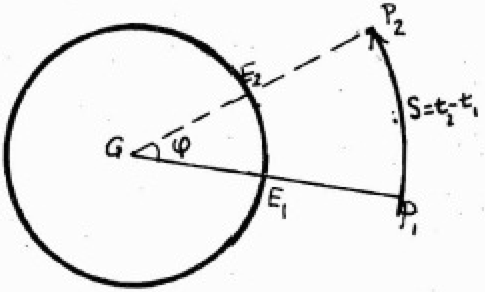
Kolayca görüldüğü gibi, bu değer tam bir sabit olmayıp, **gezegenin** kütlesine bağlıdır. Mamafih Güneş sistemindeki en büyük gezegen olan Jupiterin kütlesi bile Güneşinkinin binde biri kadardır; dolayısiyle, **M** in yanında m ihmal edilebileceğinden, pratik maksatlar için **üçüncü** kanunun düzeltilmemiş şekli kullanılabilir.

Kepler'in düzeltilmiş üçüncü kanunu, ortalama hız veya ortalama hareket $n = \dfrac{2\pi}{P}$, yardımıyla, $a^3n^2 = G\,(M + m)$ şeklini alır.

2.3 Problemler.

1. Herhangi bir gezegenin Güneşe olan uzaklığını, astronomi birimi cinsinde bulunuz.

Çözüm: Bir gezegenin yörüngesi üzerindeki bir noktadan kalkıp tekrar aynı noktaya gelinceye kadar geçen zamanı –Yıldızsal periodu– P ile ve yer ile aynı doğrultudan kalkıp yine aynı doğrultuya gelinceye kadar geçen zamanı –kavuşum periodunu–S ile gösterelim. Şekle dikkat edilirse, yer için $2\pi + \varphi = \dfrac{2\pi}{P_\oplus} S$ ve gezegen için $\varphi = \dfrac{2\pi}{P} S$ dir.



Bunlardan $2\pi + \dfrac{2\pi}{P} S = \dfrac{2\,\pi}{P_\oplus} S$ elde ederiz. $P_\oplus = 1$ yıl olduğundan, P ve S de yıl cinsinden ifade edilmek şartiyle,

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{P} = 1$$

bağıntısını elde ederiz. S kolayca gözlenir ve formülden P elde edilir. Şimdi yer ve adı geçen gezegen için Keplerin üçüncü kanunu

$$\frac{a^3_\oplus}{P^2_\oplus} = \frac{a^3}{P^2}$$ Burada $a_\oplus = 1$ Ast. Birimi

ve $P_\oplus = 1$ yıl olduğundan,