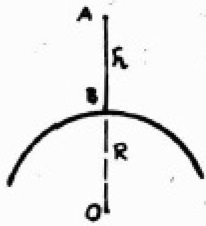
2. Potansiyel enerji. Bir cismin bulunduğu yerden dolayı haiz olduğu iş yapma kabiliyetidir.

Yer çekim alanında birim kütlenin A dan B ye gitmesiyle yapılan iş



$$W_{AB} = GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$ olarak bulunmuştu.

Kütle birim değil de m ise yapılan iş

$$W_{AB} = m\, GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$ olacaktır.

Şimdi B noktasını yer yüzeyinde A yı de düşey doğrultuda alalım.

$r_1 = R + h$ ve $r_2 = R$ olmak üzere

$$W_{AB} = m\, GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = m\, GM \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2}\right) = m\, GM \frac{h}{R r_1}$$

$W_{AB} = m \dfrac{GM}{R^2} \dfrac{R}{r_1} h$ elde edilir. Yeryüzüne yakın yerlerde $\dfrac{R}{r_1} = 1$ ve $\dfrac{GM}{R^2} = g$ koyulursa

$W_{AB} = mgh$ elde edilir. Bu, A dan bırakılan cismin B ye düşmesiyle yapılan iştir. O halde cisim A da iken bulunduğu yerden dolayı bir iş yapma kabiliyetine sahip oluyorki buna biz A daki cismin B ye göre potansiyel enerjisi diyoruz. Dolayısıyla $E_p = mgh$

Şayet A daki kütlenin Yer merkezine göre potansiyel enerjisi göz önüne alınırsa kolayca görülürki bu A noktasındaki yerçekim potansiyeline eşittir.

2.12 Enerjinin korunumu kanunu.

Konservatif bir alandaki bir cismin hareketinde, cismin potansiyel enerjisi ile kinetik enerjisi toplamı sabittir.

Potansiyel birim kütle için tarif edilmiş olduğundan $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ ifade-

sinde $\vec{F} = -\nabla V$ ve $\vec{F} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ koyalım

$$- \nabla V \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

$$- \nabla V \cdot dr = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt, \; dr = \hat{\tau} ds \text{ ve } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon} \quad \text{koyalım}$$

$$- \triangle V \cdot \hat{\tau}\, ds = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot \vec{\upsilon}\, dt$$

$$- \frac{dV}{ds} ds = \vec{\upsilon} \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} dt \quad \text{integre ederek}$$

$$- \int dV = \int \vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}$$

$$- V = \tfrac{1}{2} \upsilon^2 + \text{sabit}$$

$$V + \tfrac{1}{2} \upsilon^2 = \text{sabit elde ederiz.}$$

Burada V potansiyeldir, ki bu da birim kütlenin potansiyel enerjisine eşittir. $\frac{1}{2} \upsilon^2$ ise birim kütlenin kinetik enerjisidir. Son bağıntıya enerji denklemi denir. Bağıntıyı m kütlesi için yazmak istiyorsak her tarafı m ile çarpmak yeter.

2.13 Dönen cisimlerde potansiyel ve enerjinin korunumu.

z ekseni etrafında ω sabit açısal hızıyla dönen bir koordinat sistemi göz önüne alalım Eğer m kütlesine $\vec{F}$ kuvveti tesir ediyorsa m nin dönen eksenlere göre hareket denklemi

$$\vec{F} = m \left[\ddot{\vec{r}} + 2\omega\hat{z} \times \dot{\vec{r}} + \omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r}) \right] \quad \text{dir.}$$

$\vec{r}$ nin Oz boyunca ve Oz ye dik bileşenleri z ve ρ olsun

$$\vec{r} = z\hat{z} + \vec{\rho}$$

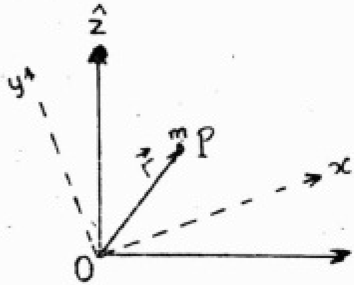
Dolayısiyle $\vec{F}=m\,\{\ddot{\vec{r}} + 2\omega\hat{z}\times\dot{\vec{r}} + \omega^2\hat{z}\times[\hat{z}\times(z\hat{z}+\vec{\rho})]\}$

$$= m\,[\ddot{\vec{r}} + 2\omega\hat{z}\times\dot{\vec{r}} + \omega^2\hat{z}\times(o+\hat{z}\times\vec{\rho})]$$

$$= m\,(\ddot{\vec{r}} + 2\omega\hat{z}\times\dot{\vec{r}} + \omega^2\hat{z}\times\hat{z}\times\vec{\rho})$$

$$= m\,\{\ddot{\vec{r}} + 2\omega\hat{z}\times\dot{\vec{r}} + \omega^2[(\hat{z}\cdot\vec{\rho})\,\hat{z} - (\hat{z}\cdot\hat{z})\,\vec{\rho}]\}$$

$= m\,(\ddot{\vec{r}} + 2\omega\hat{z}\times\dot{\vec{r}} - \omega^2\vec{\rho})$ olur. $\dot{\vec{r}}$ ile skaler olarak



çarpalım $\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = m\,[\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} + (2m\hat{z}\times\dot{\vec{r}})\cdot\dot{\vec{r}} - \omega^2\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{r}}]$ fakat $\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{r}}$ $= \vec{\rho}\cdot\dot{\vec{\rho}}$ dır. Çünkü $\dot{\vec{r}} = \dot{z}\hat{z} + \dot{\vec{\rho}}$, $\vec{\rho}$ ile çarpınca ilk terim sıfır olur. $\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{\rho}}$ yerine de $\rho\dot{\rho}$ yazabiliriz. Netice olarak

$$\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = m\,(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} - \omega^2\rho\dot{\rho})$$ elde edilir.

Şayet $\vec{F}$, dönen eksenlere göre tarif edilmiş bir V potansiyelini haiz ise $\vec{F} = -\nabla V$ dir. m = 1 olarak

$$-\nabla V\cdot d\vec{r} = (\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} - \omega^2\rho\dot{\rho})\ dt$$

$$-\nabla V\cdot\hat{\tau}ds = (\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} - \omega^2\rho\dot{\rho})\ dt$$

$$-\int \frac{dV}{ds}\,ds = \int(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} - \omega^2\rho\dot{\rho})\ dt.$$

$$- V = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 + \text{sabit}$$

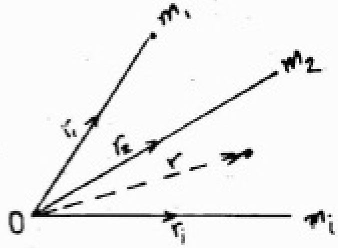
$$\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2} + (V - \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2) = \text{sabit.}$$ elde edilir.

Bu bağıntıya modifiye edilmiş enerji entegrali, $V - \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2$ ye modifiye edilmiş potansiyel, $- \frac{1}{2} \omega^2\rho^2$ ye de dönme potansiyeli denir.

2.14 Katı cisimlerin bazı özellikleri.

1. Kütle merkezi. Kütleleri m_i olan n tane partikül göz önüne alalım. Herhangi bir O koordinat merkezinden m_i lere giden vektörler r_i ise

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



vektörünün uç noktasına m_i kütlelerinin kütle merkezi denir. Üç boyutlu uzayda $\vec{r}$ nin koordinatları x y z ise

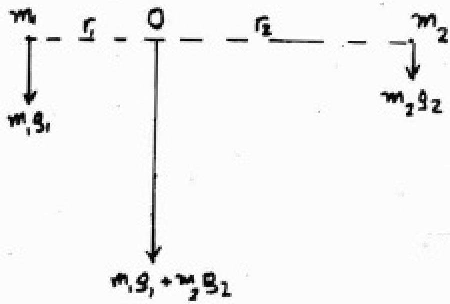
$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Homojen katı cisimlerde yukarıki tarif

$$r = \frac{\int r dm.}{\int dm}$$

şeklini alır.

2. Çekim (ağırlık) merkezi: m_i kütlelerine tesir eden yer çekim kuvveti $m_i g_i$ dir. $m_1 g_1$ ve $m_2 g_2$ kuvvetlerinin bileşkesi olan $m_1 g_1 + m_2 g_2$ kuvveti $m_1 g_1 r_1 = m_2 g_2 r_2$ bağıntısıyla verilen bir O noktasına tatbik edilen bir kuvvettir. Bu noktaya m_1 ve m_2 kütlelerinin çekim merkezi denir. $m_1 + m_2$ kütlesi ile üçüncü m_3 kütlesi alınır ve aynı işlem yapılırsa ve devam edilirse son bulacağımız nokta m_i kütlelerinin çekim merkezi olacaktır.

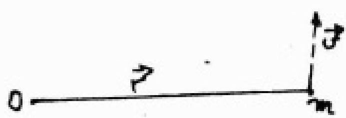


Yer yüzüne çok yakın yerlerde g sabit olduğundan $m_1 g_1 r_1 = m_2 g_2 r_2 \rightarrow m_1 g r_1 = m_2 g r_2 \rightarrow m_1 r_1 = m_2 r_2$ elde edilir ki bu, bu halde O noktasının aynı zamanda kütle merkezi olduğunu gösterir.

3. Lineer momentum: Kütlesi m olan bir cisim $\vec{\upsilon}$ hızıyla hareket ediyorsa cismin lineer momentumu

$$\vec{P} = m\,\vec{\upsilon}$$

olarak tarif edilir.



4. Açısal momentum (momentum momenti): Kütlesi m olan bir cismin lineer momentumu $m\vec{\upsilon}$ ise, cismin O ya göre açısal momentumu

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}$$

olarak tarif edilir.

5. Kuvvet momenti (torque): O noktasından r kadar uzakta bulu-

nan bir cişme $\vec{F}$ kuvveti tesir ediyorsa, bu kuvvetin O ya göre kuvvet momenti

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}$$

olarak tarif edilir.

6. Atalet momenti: Kütleleri m_i olan cisimlerin bir eksen etrafında döndüğünü kabul edelim m_i lerin eksene olan uzaklıkları r_i olsun. m_i lerin bu eksene göre atalet momenti

$$I = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \quad m_i$$

olarak tarif edilir. Homojen katı bir cisim halinde yukarıki tarif

$I = \int r^2 \, dm$ şeklini alır.

Uç boyutlu bir uzayda bir cismin x, y, z eksenlerine göre atalet momentleri

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \, dm, I_y = \int (x^2 + z^2) \, dm, \; I_z = \int (x^2 + y^2) \, dm$$

ile verilir.

Şimdi Yukarıki tariflerden bazı özellikler çıkaracağız:

1°. Newtonun ikinci kanunu $\vec{F} = \dfrac{d\,(m\,\vec{\upsilon})}{dt}$ şeklinde yazılabileceğine göre, Kuvvet lineer momentumun zamana göre değişme derecesidir. Harekette, cisme hiç bir kuvvet tesir etmiyorsa $\vec{F} = O$ dolayısiyle lineer momentum sabittir.

2°. $\vec{F} = \dfrac{dm\,\vec{\upsilon}}{dt}$ yı $\vec{r}$ ile vektörel olarak çarpalım

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\,m\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\,(\vec{r} \times m\vec{\upsilon})}{d\,t}$$

veya: $\vec{L} = \dfrac{d\vec{J}}{dt}$: Bu, dönel hareketler için Newtonun ikinci kanunudur.

O halde kuvvet momenti, açısal momentumun zamana göre değişme derecesine eşittir. Harekette kuvvet momenti sıfırsa yâni $\vec{r}$ ile $\vec{F}$ aynı doğrultuda ise açısal momentum sabittir.

3°. r_i, m_i lerin dönme eksenine olan uzaklıkları olsun. m_i nin açısal hızı ω ile lineer hızı υ_i arasında

$$\upsilon_i = \omega r_i$$

bağıntısı vardır. r_i ve υ_i ler dik olduklarından

$$\vec{J}_i = \vec{r}_i \times m_i \; \vec{\upsilon}_i = r_i m_i \upsilon_i = r_i m_i \; \omega r_i = r_i^2 \; m_i \omega$$

toplam alarak

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \; m_i \; \omega \text{ buradan}$$

$$\boxed{J = I\omega} \text{ türev alarak}$$

$$\boxed{L = I\alpha}$$

elde edilir. Burada α açısal ivmedir.

4°. Dönmeden meydana gelen kinetik enerji

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i \; r_i^2 \; \omega^2$$

toplam olarak $\sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i \; r_i^2 \; \omega^2$

$\boxed{T = \tfrac{1}{2} \omega^2 \; I}$ elde ederiz.

5°. Lineer kemiyetlerle açısal kemiyetler arasında aşağıdaki tekabül mevcuttur.

$$\begin{array}{ccc}
s & \rightarrow & \Theta \\
\upsilon & \rightarrow & \omega \\
a & \rightarrow & \alpha \\
m & \rightarrow & I \\
F & \rightarrow & L \\
F = ma & \rightarrow & L = I\,\alpha \\
T = \tfrac{1}{2} m\,\upsilon^2 & \rightarrow & T = \tfrac{1}{2} I\,\omega^2
\end{array}$$

2.15 Problemler.

1. $\vec{F} = 4xyz\,\hat{i} + 2x^2 z\,\hat{j} + 2x^2 y\,\hat{k}$ kuvvet alanında bir partikül $x = t^2$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ eğrisi boyunca $t = 1$ den $t = 2$ ye kadar gitmektedir. Yapılan işi bulunuz.

Çözüm:

$$W = \int_C \vec{F} \, . \, d\vec{r} = \int_C (4xyz\hat{i} + 2x^2z\hat{j} + 2x^2y\hat{k}) \, . \, (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$= \int_C (4xyzdx + 2x^2zdy + 2x^2ydz)$$

$$= \int_1^2 4t^2 2t^2 t^3 d\,(t^2) + 2t^4 t^3 d\,(2t^2) + 2t^4 2t^2 d\,(t^3)$$

$$= \int_1^2 (16\ t^8 + 8t^8 + 12\ t^8)\ dt$$

$$= \int_1^2 36\,t^8\,dt = \left| \frac{36}{9}\ t^9 \right|_1^2 = 4\ \left| t^9 \right|_1^2 = 2044 \text{ erg}$$

elde edilir.

Diğer taraftan dikkat edilirse alanın potansiyeli $V = 2x^2\ yz$ dir. t cinsinden $V = 2t^4\ .\ 2t^2\ .\ t^3 = 4t^9$ dolayısiyle $V_{t=2} - V_{t=1} = 4.2^9 - 4.1 = 2044$ bulunur.

2. $\vec{F} = (2x - y)\,\hat{i} + (x + y)\,\hat{j}$ kuvvet alanındaki bir partikül, parametrik denklemi $x = 3\ \cos t$ ve $y = 3\ \sin t$ olan bir çenber etrafında bir defa dönmektedir. Yapılan işi bulunuz.

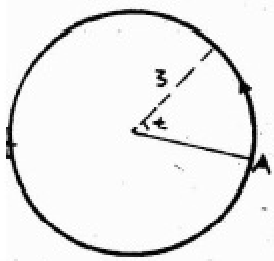
Çözüm:

$$W = \int_C \vec{F} \, . \, d\vec{r} = \int_C [(2x - y)\,\hat{i} + (x + y)\,\hat{j}\,] \, . \, (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$= \int_C [(2x - y)\,dx + (x + y)\,dy\,]$$

$$= \int_0^{2\pi} \{\ [2(3\ \cos t) - 3\ \sin t\,]\ \overbrace{(-3\ \sin t)\ dt}^{dx} + (3\ \cos t + 3\ \sin t)\ \underbrace{3\ \cos\ t\ dt}_{dy}\}$$

$$= 18\ \pi \text{ erg.}$$



3. Enerjinin korunumu kanununu düşey doğrultuda v hızıyla atılmış bir m cismi için sağlayınız.

Çözüm:

$$E_k + E_p = \text{sabit ? yani}$$

$$\tfrac{1}{2} mv^2 + mgh = \text{sabit'midir?}$$

Cisim h yüksekliğinde iken $v = - g t + v_o$ ve $h = - \frac{1}{2} gt^2 + v_o t$ dir, yerlerine koyulursa

$$\tfrac{1}{2} m(g^2t^2 - 2gv_o t + v_o^2) + mg(- \tfrac{1}{2} gt^2 + v_o t) = \tfrac{1}{2} mv_o^2 =$$

sabit. elde edilir.

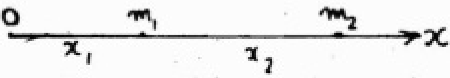
4. x ekseni üzerinde bulunan ve koordinatları x_1 ve x_2 olan m_1 ve m_2 kütlelerinin kütle merkezini bulunuz.

Çözüm:

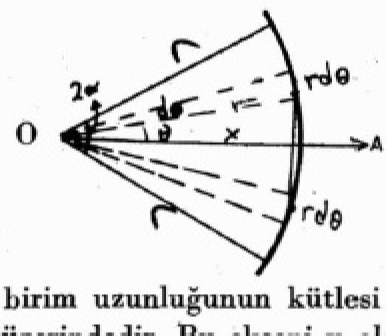
$$x = \frac{\Sigma\, m_i\, x_i}{\Sigma\, m_i} \qquad \text{formülünde}$$

$$i = 1, 2 \quad \text{alarak} \qquad x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{elde ederiz.}$$

Eğer kütleler birbirine eşitse kolayca görülür ki kütle merkezi m_1 ve m_2 nin tam orta noktasıdır.



5. r yarıçaplı bir çenberin merkezden 2 α açısıyla görülen parçası homojen bir telden yapılmıştır. Telin kütle merkezini bulunuz.



Çözüm: Telin birim uzunluğunun kütlesi σ olsun. Kütle merkezi OA simetri ekseni üzerindedir. Bu ekseni x olarak alalım. $rd\Theta$ uzunluğunun kütlesi $\sigma rd\Theta$, bunun simetriği olan kısmın kütlesi de $\sigma rd\Theta$ dır. Kütle elemanı dm olarak, her iki parçanın kütlesi toplamını alalım. Bu iki parçanın kütle merkezi x ekseni üzerinde olduğundan

$$x = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\alpha} \overbrace{r\cos\Theta}^{x}\ \overbrace{2\sigma r d\Theta}^{dm}}{\int_0^{\alpha} \underbrace{2\sigma r d\Theta}_{dm}} = \frac{r\int_0^{\alpha}\cos\Theta\, d\Theta}{\int_0^{\alpha} d\Theta} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

6. R yarı çaplı homojen dairesel bir cismin kütlesi M dir. Bu cismin, merkezden geçen ve yüzeyine dik olan bir eksen boyunca, atalet momentini bulunuz.

Çözüm:

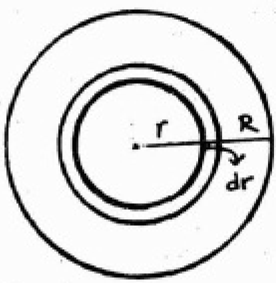
$$\overbrace{\pi r^2 + 2\pi r dr + dr^2}^{\text{ihmal}}$$

Alan elemanı $dA = \pi (r + dr)^2 - \cancel{\pi r^2} = 2\pi r dr$, birim alandaki kütle $\dfrac{M}{\pi R^2}$ dir. O halde kütle elemanı $dm = \dfrac{M}{\pi R^2}\, dA$

$$dm = \frac{M}{\pi R^2}\, 2\pi\, r dr = \frac{2M}{R^2}\, r\, dr$$

$$I_z = \int r^2\, dm = \int_O^R r^2 \frac{2M}{R^2}\, r\, dr = \frac{2M}{R^2}\int_O^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\,\frac{1}{4}\,\Big|\, r^4\, \Big|_O^R =$$

$\frac{1}{2}\, m\, R^2$



7. R yarı çaplı homojen bir kürenin kütlesi m dir. Bir çapı boyunca atalet momentini bulunuz.

Çözüm:

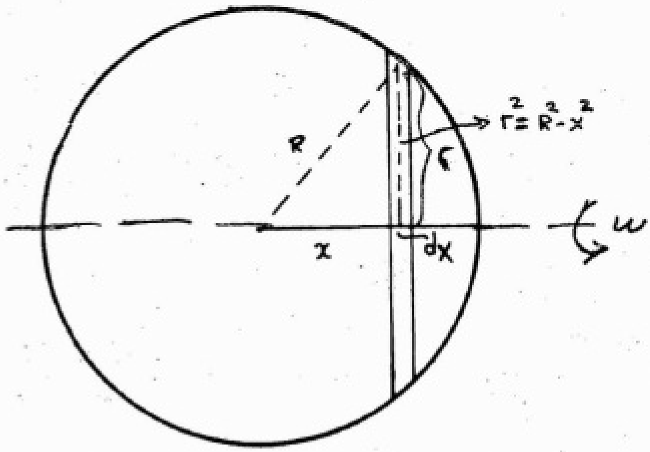
Birim hacımdaki kütle $\dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\, \pi (R^2 - x^2)\, dx$$

$$I = \int r^2 dm = \int_O^R (R^2-x^2)\ \frac{3m}{4R^3}\ (R^2-x^2)\,\overset{dx}{d\cancel{x}} = \frac{3m}{4R^3} \int_O^R (R^2-x^2)^2\, dx$$

$$= \frac{3m}{4R^3} \int_O^R (R^4-2R^2x^2 + x^4)dx = \frac{3m}{4R^3} \left| R^4x - \frac{2}{3} R^2x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right|_O^R$$

$I_z = \dfrac{2}{5}\ m\ R^2$ elde edilir.



2. 16 Dönen katı bir cismin hareket denklemleri.

Merkezi, dönen cismin çekim merkezi, eksenleri de cismin esas atalet eksenleriyle çakışan dönen bir koordinat sistemi x, y, z olsun. Sabit bir koordinat sisteminin merkezine göre cismin toplam açısal momentumu $\vec{J}$ ve toplam kuvvet momenti (torque) $\vec{L}$ ise

$$\vec{L} = \frac{d\vec{J}}{dt} \qquad \text{dir.}$$

Burada $\dfrac{d}{dt}$ eylemsiz ~~sabit~~ sistemdeki türevi göstermektedir. Şayet xyz sistemi eylemsiz ~~sabit~~ sisteme göre $\vec{\omega}$ açısal hızıyla dönüyorsa $\dfrac{\partial}{\partial t}$, xyz sistemindeki türevi göstermek üzere

$$\vec{L} = \frac{d\vec{J}}{d\,t} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \vec{\omega}\ x\ \vec{J} \text{ dır.}$$

xyz sisteminde $\vec{L}$, $\vec{J}$ ve $\vec{\omega}$ nın bileşenleri L_x, L_y, L_z; J_x, J_y, J_z ve ω_x, ω_y, ω_z ise

Yukarıki denklemin x ekseni boyunca bileşeni

$$L_x = \frac{\partial J_x}{\partial t} + (\omega_y J_z - \omega_z J_y) \text{ dır.}$$

diğer taraftan $J_x = I_x \omega_x$; $J_y = I_y \omega_y$; $J_z = I_z \omega_z$ bağıntıları da mevcuttur. bunları yukarıda yerlerine koyarsak

$$L_x = I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} - \omega_y \omega_z (I_y - I_z)$$

– Türevi göstermek için . işaretini kullanarak ve diğer eksenleri de göz önüne alarak

$$L_x = I_x \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_y - I_z)$$

$$L_y = I_y \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_z - I_x)$$

$$L_z = I_z \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_x - I_y)$$

Bu denklemlere Euler hareket denklemleri denir.

Şayet cisme hiç bir harici kuvvet tesir etmiyorsa torque sıfır olacağından Euler denklemleri

$$I_x \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_y - I_z) = 0$$

$$I_y \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_z - I_x) = 0$$

$$I_z \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_x - I_y) = 0$$

şeklini alır.

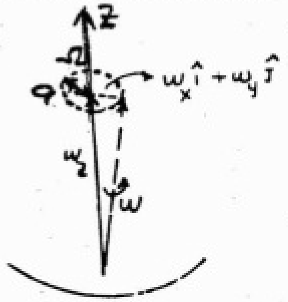
Şimdi Euler denklemlerini bir eksen etrafında simetrik olan, dönen bir katı cisme tatbik edeceğiz. Farzedeceğiz ki cisme hiç bir harici kuvvet tesir etmiyor. Bu demektir ki cisme tesir eden harici kuvvet ya sıfırdır veya kütle merkezine tesir etmektedir. Eğer Güneş ve Ayın, Yer üzerinde yarattığı torque'u şimdilik ihmal edersek yukarıki hale iyi bir örnek bulmuş oluruz.

Yerin merkezini, koordinat merkezi olarak alalım. Yerin dönme ekseni de üçüncü esas atalet momenti ekseni - z ekseni olarak alınsın. Bu durumda yerin bu esas eksenler boyunca atalet momentleri $I_x = A$, $I_y = A$, $I_z = C$ olarak gösterilir. Bunlar yardımıyla Euler denklemleri

$$A \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (C - A) = 0$$

$$A \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (A - C) = 0$$

$$C \dot{\omega}_z \qquad\qquad = 0 \quad \text{haline gelir.}$$



Son denklemin integrasyonu ω_z = sabit verir. Bu demektir ki açısal hızın simetri ekseni boyunca bileşeni sabittir. Diğer denklemleri çözmek

için $\Omega = \dfrac{C - A}{A} \; \omega_z$ diyelim

$$\dot{\omega}_x + \Omega \, \omega_y = 0$$

$$\dot{\omega}_y - \Omega \, \omega_x = 0 \quad \text{elde ederiz.}$$

İlk denklemden türev alarak $\ddot{\omega}_x + \Omega \, \dot{\omega}_y = 0$ elde ederiz.
$\dot{\omega}_y = \Omega \omega_x$ koyarak $\ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0 \rightarrow \omega_x = a \cos \; (\Omega t + \varepsilon)$
elde edilir, bu değer ikinci denklemde yerine koyulursa

sbt

$\omega_y = a \sin \; (\Omega t + \varepsilon)$ elde edilir. a ve ε integrasyon sabitleridir.

Son iki denklem gösteriyor ki ω nin, simetri eksenine dik bir düzlem üzerindeki izdüşümü a yarı çaplı ve $\tau = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ periodlu bir daire çizmektedir. Bu hareketin açısal hızı Ω dır. Ω yerine değeri koyulursa

$\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_z} \cdot \dfrac{A}{C - A}$ buluruz. Yer için $\omega_z = 2\pi/\text{gün}$, $\dfrac{C\text{-}A}{A} =$ $\dfrac{I_z =}{I_y =}$

0,0033 tür. Dolayısiyle $\tau = \dfrac{2\pi}{2\pi \; / \; \text{Gün}} \cdot \dfrac{1}{0{,}0033} = 300$ gün.

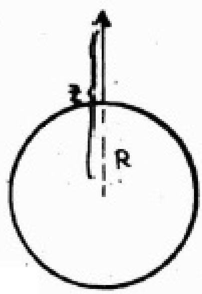
O halde yerin dönme ekseni, 300 günde, Kuzey kutbu etrafında bir daire çizmektedir. Bu dairenin yarı çapı kutupta 4,5 m civarındadır.

Yörünge çok gayri düzensizdir. Gerçekte period 300 yerine 427 gün olarak rasat edilmiştir. Yörüngenin düzensiz oluşu atmosferik hareketin doğurduğu yerin kütle dağılımındaki kaymalara, periodun değişik oluşu ise yerin tam bir katı cisim olmayıp, örneğin çelikte olduğu gibi elâstik özelliklere sahip olması ile izah edilir.

Yerin dönme ekseninin, kuzey kutbu etrafındaki bu presesyon hareketi, bu eksenin ekliptiğin kutbu etrafında 26 bin senede tamamlanan 23° lik yarı çaplı dairesel hareketile karıştırılmamalıdır. Bu ikincisi, Astronomik presesyon olup, Güneş ve Ayın yer üzerindeki gravitasyonel torque'larından meydana gelir.

2.17 Newton çekim alanında doğrusal hareket.

Yer yüzeyine çok yakın yerlerde Newton çekimini üniform kabul edebiliriz. Bu taktirde yer çekim ivmesi sabit ve g ye eşit olduğundan düşey hareket 1.15 teki gibi incelenir. Yüzeyden uzaklaştıkça birim kütle başına Yerin Çekim Kuvveti $F = G \dfrac{M}{r^2}$ olacaktır. Şimdi birim kütleyi yukarıki çekim kuvvetine zıt doğrultuda dikey olarak atalım. Bu kütleye tesir eden kuvvet $F = - G \dfrac{M}{r^2}$ olur. Dikey doğrultuda cismin Yer merkezinden itibaren aldığı yolu z ile gösterelim. Sadece bu doğrultudaki hareketi inceleyeceğiz. Hareketin denklemini Newton 2. den, $F = ma$ da $m = 1$ ve $a = \ddot{z}$ koyarak elde ederiz.



$$\ddot{z} = - G \frac{M}{z^2}$$

İkinci mertebeden bu diferansiyel denklemi çözmek için her iki taraf $\dot{z}$ ile çarpalım

$$\dot{z}\,\ddot{z} = - \dot{z}\,\frac{GM}{z^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{z}^2}{dt} - GM\, d\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \text{ integre ederek}$$

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{GM}{z} = \text{sabit.}$$

Dikkat edilirse bu denklemde ilk terim kinetik, ikincisi ise potansiyel enerjisidir. O halde, konservatif bir alanda potansiyel biliniyorsa, bu denklem – enerji denklemi – hemen yazılabilir. Böylece hareket denklemini yazıp bir defa integre etmeye lüzum kalmaz. Bu denklemi tekrar integre etmeden önce integrasyon sabitini tayin edelim. Cismi attığımız andaki hız υ_o ve $z = R$ olsun.

$$\frac{1}{2}\upsilon_o^2 - \frac{GM}{R} = \text{sabit olur. Yerine koyarak}$$

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{GM}{z} = \frac{1}{2}\upsilon_o^2 - \frac{GM}{R} \text{ Buradan da}$$

$$\dot{z}^2 = 2\frac{GM}{z} + \left(\upsilon_o^2 - \frac{2GM}{R}\right) \text{ elde edilir.}$$

Bu, cismin herhangi bir andaki hızının karesini veren bağıntıdır. Denklemin sağ tarafı incelenirse, hız için üç halin mevcut olduğu görülür:

1°. $\upsilon_o^2 < 2\frac{GM}{R}$ ise: Bir $z = z_1$ değeri için sağ taraf sıfır olur. Dolayısiyle $\dot{z}$, yâni cismin hızı sıfır olacağından atılan cisim geri döner.

2°. $\upsilon_o^2 > 2\frac{GM}{R}$ ise: z nin artan değerleri için sağ taraf daima büyür. $z \to \infty$ için $\dot{z}$ sonlu bir değer alır. O halde, atılan cisim sonsuza gider ve sonsuzda belirli bir hızı haizdir.

3°. $\upsilon_o^2 \propto 2\frac{GM}{R}$ ise: z nin artan değerleri için $\dot{z}$ sıfıra yaklaşır $z \to \infty$ için $\dot{z}$, yâni hız, sıfır olur. Cisim yine sonsuza gider fakat sonsuzdaki hızı sıfırdır.

υ_o ilk hızının bu değerine "Kurtulma hızı" denir. Kurtulma hızı sonsuzdan sıfır hızıyla atılan bir kütlenin yer yüzeyine eriştiği andaki hızı olarakta düşünülebilir.

Şimdi diferansiyel denklemin çözümünü ele alacağız. Sadece cismin geri dönme hali için bir çözüm vereceğiz. Diğer iki hal de benzer şekilde çözülebilir.

Hız sıfır olduğu zamanı başlangıç olarak alırsak $\upsilon_o = 0$ ve $R = z_1$ olur. Dolayısiyle

$$\dot{z}^2 = 2\,\frac{GM}{z} - 2\,\frac{GM}{z_1} \quad \text{olur. Buradan}$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{2\,\frac{GM}{z_1}}\;\sqrt{\frac{z_1 - z}{z}}$$

$$\frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{z_1 - z}} = \sqrt{2\,\frac{GM}{z_1}}\;dt$$

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{zz_1 - z^2}} = \sqrt{2\,\frac{GM}{z_1}}\int dt$$

$$-\sqrt{zz_1 - z^2} + \frac{z_1}{2}\arcsin\frac{2z - z_1}{z_1} = \sqrt{2\,\frac{GM}{z_1}}\,t + \text{sabit}$$

Sabiti bulmak için $t = 0$ iken $z = z_1$ şartını kullanırız.

$$\text{Sabit} = \frac{z_1}{2}\;\frac{\pi}{2} \quad \text{dolayısiyle,}$$

$$-\sqrt{zz_1 - z^2} + \frac{z_1}{2}\arcsin\frac{2z - z_1}{z_1} = \sqrt{2\,\frac{GM}{z_1}}\,t + \frac{\pi z_1}{4}$$

aranılan çözümdür. Bu denklemde t (zaman) nın değeri yerine koyularak z (cismin aldığı yol) elde edilir.

2.18 Problemler.

1. Yer yarı çapı 6378 km. yer çekim ivmesi $g = 981$ cm | san² olduğuna göre yer yüzeyindeki kurtulma hızını bulunuz.

Çözüm:

$$\upsilon_o = \sqrt{2\,\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\,\frac{GM}{R^2}\,R} = \sqrt{2\,gR}$$

$$= (2 \times 981\ \text{cm/san}^2 .\ 6378 \times 10^5\ \text{cm})^{1/2}$$
$$= 11{,}2 \times 10^5\ \text{cm/san.}$$
$$= 11{,}2\ \text{km/san.}$$

2. 2 km. yarı çaplı bir gezegenin yoğunluğu 3 gr /cm³ olduğuna göre, bu gezegenin yüzeyindeki kurtulma hızını bulunuz. Yer yüzeyinde kütlesi birim olan bir cisme bu hız verilse cisim ne kadar yükselir.

Çözüm:

$$\upsilon_o = \sqrt{2\frac{GM}{R}} \quad , \; M = \frac{4}{3}\pi R^3 . \rho = \frac{4}{3}\pi (2x10^5 \text{ cm})^3 .$$
$$3 \text{ gr} / \text{cm}^3 = 32 \pi \times 10^{15} \text{ gr.} \cong$$

$$GM = (6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ san}^{-2})\, 32\pi \times 10^{15} \text{ gr.}$$
$$= 213,44\, \pi \times 10^7 \text{ cm}^3 \text{ san}^{-2}$$

$$\upsilon_o = \sqrt{\frac{2 \times 213,44\, \pi \times 10^7 \text{ cm}^3 \text{ san}^{-2}}{2 \times 10^5 \text{ cm.}}} = 251,1 \text{ cm/san.}$$

Yer yüzeyinden atılan bir cisim için $\upsilon_o = 251,1$ cm/san çok küçük bir hız olduğundan cisim çok fazla yükselemez. Onun için üniform bir çekim sahası kabul ederek ivmeyi sabit $= g$ alırsak, düşen cisimler halinde $\upsilon = \dot{z} = -gt + \upsilon_o$ ve yol $z = -\frac{g}{2}t^2 + \upsilon_o t$ dir. En yüksek noktada $\upsilon = 0$ dolayısiyle $-gt + \upsilon_o = 0 \rightarrow t = \frac{\upsilon_o}{g}$ bunu yol denkleminde yerine koyarsak $z = -\frac{g}{2}\left(\frac{\upsilon_o}{g}\right)^2 + \upsilon_o\left(\frac{\upsilon_o}{g}\right)$

$$z = \frac{\upsilon_o^2}{2g}$$
$$= \frac{(251,1 \text{ cm/san})^2}{2 \times 981 \text{ cm/san}^2}$$
$$= 32,1 \text{ cm.}$$

3. Yer yüzeyindeki ve 500 km yukarıdaki kurtulma hızlarını mukayese ediniz.

Çözüm:

$$\upsilon_o = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad \upsilon_1 = \left(\frac{2GM}{R+500}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\upsilon_o}{\upsilon_1} = \left(\frac{R+500}{R}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{500}{R}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{500}{6378}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\upsilon_o}{\upsilon_1} = 1,04 \rightarrow \upsilon_o = 1,04\, \upsilon_1 \text{ elde edilir.}$$