# AĞIRLIK MERKEZİ (CENTROID)

Ağırlık merkezi paralel kuvvetlerden ortaya çıkan geometrik bir kavramdır. Yalnızca paralel kuvvetlerin ağırlık merkezi vardır. Ağırlık merkezi bir fiziksel cismin veya parçacıklar sisteminin tüm ağırlığının toplandığı nokta olarak düşünülür. Düzgün geometrik cisimlerde eğer simetri ekseni varsa ağırlık merkezi bu simetri ekseni üzerindedir. Eğer cisme ait iki veya üç simetri ekseni varsa ağırlık merkezi bu eksenlerin kesişim noktasında yer alır.
Bir, iki veya üç boyutlu cisimler analitik fonksiyonlar olarak tanımlanmış ise bunların ağırlık merkezleri integral yoluyla hesaplanır. Birkaç cismin birleşmesiyle oluşmuş cisimlere kompozit cisim adı verilir. Bu tür cisimlerin ağırlık merkezleri de aşağıdaki gibi hesaplanır:

| **Çizgi** | | **Alan** | | **Hacim** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *Kompozit* | | *Kompozit* | | *Kompozit* |
| $\bar{x} = \frac{\int x dl}{\int dl}$ | $\bar{x} = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}$ | $\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$ | $\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$ | $\bar{x} = \frac{\int x dV}{\int dV}$ | $\bar{x} = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}$ |
| $\bar{y} = \frac{\int y dl}{\int dl}$ | $\bar{y} = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}$ | $\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$ | $\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$ | $\bar{y} = \frac{\int y dV}{\int dV}$ | $\bar{y} = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}$ |
| $\bar{z} = \frac{\int z dl}{\int dl}$ | $\bar{z} = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}$ | $\bar{z} = \frac{\int z dA}{\int dA}$ | $\bar{z} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$ | $\bar{z} = \frac{\int z dV}{\int dV}$ | $\bar{z} = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}$ |

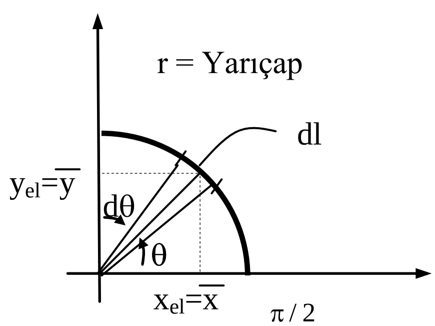
## BAZI GEOMETRİK ŞEKİLLERİN AĞIRLIK MERKEZLERİ

### 1. Çeyrek Çember Şeklinde İnce Çubuk

$$dl = r \cdot d\theta$$

$$\bar{x}_{el} = x = r\cos\theta$$

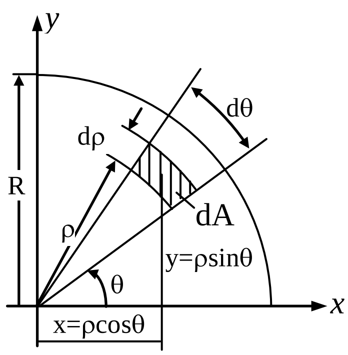
$$\bar{y}_{el} = y = r\sin\theta$$




$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi/2} r\cos\theta r d\theta}{\int_0^{\pi/2} r d\theta} = \frac{r^2[\sin\theta]_0^{\pi/2}}{r[\theta]_0^{\pi/2}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2r}{\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\pi/2} r\sin\theta r d\theta}{\int_0^{\pi/2} r d\theta} = \frac{r^2[-\cos\theta]_0^{\pi/2}}{r[\theta]_0^{\pi/2}} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$

### 2. Çeyrek Daire




$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{dA} \qquad A = \frac{\pi r^2}{4} \qquad dA = \rho d\theta d\rho$$

$$\int y dA = \int \rho\sin\theta\rho d\rho d\theta = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta = \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta$$

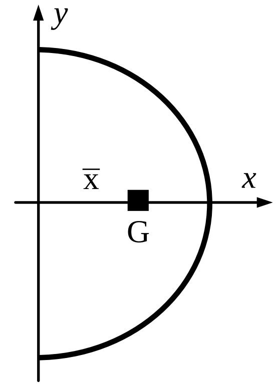
$$= \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{3} - (0-1) = \frac{R^3}{3}$$

$$= \frac{R^3}{3} \cdot \frac{4}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} \qquad \bar{x} = \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

**3. Yarım Daire**

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{dA} \qquad \bar{y} = 0 \qquad A = \frac{\pi r^2}{2} \qquad dA = \rho d\theta d\rho$$

$$\int x dA = \int \rho \cos\theta \rho d\rho d\theta = \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta = \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \qquad \boxed{\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}}$$



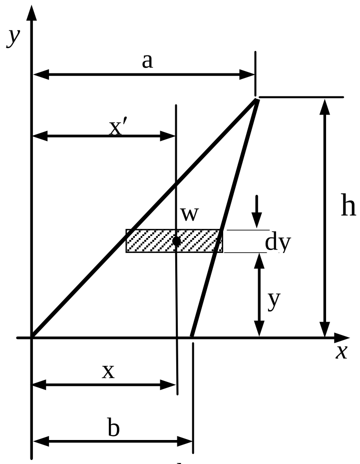

**4. Üçgen**

$$\bar{x} = ? \qquad \bar{y} = \frac{h}{3} \qquad dA = w \cdot dy$$

$$\int dA = \int w dy = \int_0^h \left[ b - \frac{b}{h} y \right] dy = \frac{bh}{2}$$

$$x = x' + \frac{w}{2} \qquad \int x dA = \int_0^h \left[ \left( \frac{a}{h} y + \frac{b}{2h}(h-y) \right) \left( \frac{b}{h}(h-y) \right) \right] dy$$

$$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$$



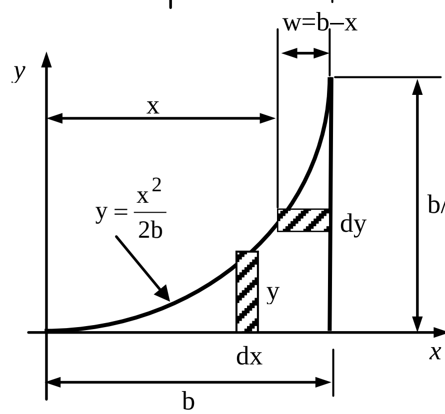

**5. Parabol**

$$y = \frac{x^2}{2b}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \qquad y = \frac{\int y dA}{\int dA} \qquad \int dA = \int y dx = \int_0^b \frac{x^2}{2b} dx = \frac{b^2}{6}$$

$$\int x dA = \int x y dx = \int_0^b x \frac{x^2}{2b} dx = \frac{b^3}{8}$$

$$\int y dA = \int w y dy = \int_0^{b/2} y \left( b - (y^{1/2} 2^{1/2} b^{1/2} \right) dy = \frac{b^3}{40}$$




$$\bar{x} = \frac{3b}{4} \qquad \bar{y} = \frac{3b}{20}$$

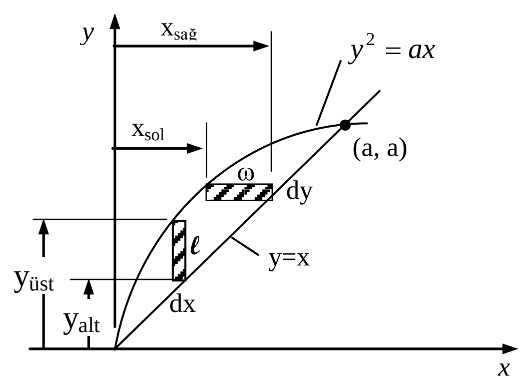
**6. Bir eğri ile doğru arasında kalan alan**

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$dA = l dx = (y_{üst} - y_{alt}) dx = (a^{1/2} x^{1/2} - x) dx$$

$$\int dA = \int_0^a (a^{1/2} x^{1/2} - x) dx = \frac{a^{1/2} x^{3/2}}{3} \cdot 2 \Big|_0^a - \frac{x^2}{2} \Big|_0^a$$

$$A = \underbrace{\frac{2a^2}{3}}_{(2)} - \underbrace{\frac{a^2}{2}}_{(3)} = \frac{a^2}{6}$$

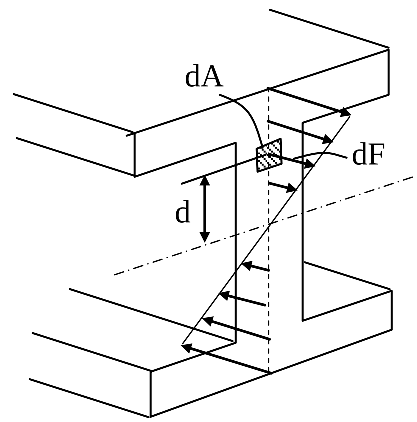


$$\int x dA = \int_0^a x(a^{1/2}x^{1/2} - x)dx = \frac{a^{1/2}x^{5/2}}{5} \cdot 2\Big|_0^a - \frac{x^3}{3}\Big|_0^a$$

$$= \underbrace{\frac{2a^3}{5}}_{(3)} - \underbrace{\frac{a^3}{3}}_{(5)} = \frac{a^3}{15} \qquad , \ \overline{x} = \frac{a^3}{15} \cdot \frac{6}{a^2} = \frac{2a}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \qquad \int y dA = \int y\left(x_{sağ} - x_{sol}\right)dy = \int_0^a y(y - \frac{y^2}{a})dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^a - \frac{y^4}{4 \cdot a}\Big|_0^a = \frac{a^3}{12} \cdot \frac{6}{a^2} \quad , \ \overline{y} = \frac{a}{2}$$

## ALAN ATALET (EYLEMSİZLİK) MOMENTİ




Etkidikleri alan içerisinde düzgün olarak dağılmış kuvvetlerin genelde bu alan içinde veya ona dik bir düzlemde yer alan bir eksene göre momentlerinin hesaplanması gerekir. Çoğunlukla bu kuvvetlerin birim alan başına şiddetleri (basınç veya gerilme olarak adlandırılır) kuvvetin etkime doğrultusunun moment ekseninden olan uzaklığıyla doğru orantılıdır. Bu şekilde, elemanter bir alana etkiyen elemanter bir kuvvet, mesafe x diferansiyel alan ile orantılı olur:

$dP \approx d \quad , \quad dP=dF/dA \quad , \quad dF/dA \approx d \quad , \quad dF \approx ddA$

Elemanter moment ise mesafe$^2$ x diferansiyel alan ile orantılı olur: $dM=d^2dA$

Böylece toplam moment: $\int dM=\int d^2dA$ , $M=\int d^2dA$ . Bu integrale "**alan atalet (eylemsizlik) momenti**" veya "**alan ikinci momenti**" adı verilir. Atalet momenti hız, ivme veya kuvvet gibi fiziksel bir büyüklük olmayıp yalnızca hesap kolaylığı sağlamaya yöneliktir; alanın geometrisinin bir fonksiyonudur. Dinamikte bir alanın ataleti gibi bir kavram olmadığından atalet momentinin herhangi bir fiziksel anlamı yoktur. Fakat mekanikte, bir kirişin eğilmesinde, bir milin burulmasında, bir makina veya yapı elemanının herhangi bir kesitindeki gerilmelerin hesaplanmasında atalet momenti kullanılır.

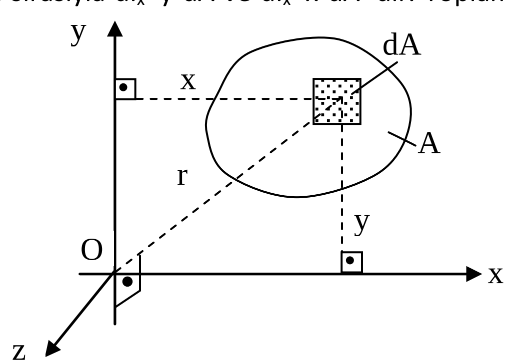
### Dik (Kartezyen) ve Polar (Kutupsal) Alan Atalet Momentleri ve Çarpım Alan Atalet Momenti

Tanımı gereği dA alanının x ve y eksenlerine göre alan atalet momentleri sırasıyla $dI_x=y^2dA$ ve $dI_x=x^2dA$ 'dir. Toplam A alanının bu eksenlere göre alan atalet momentleri ise,

$I_x=\int y^2dA$ A alanının x eksenine göre atalet momenti

$I_y=\int x^2dA$ A alanının y eksenine göre atalet momenti

Bu atalet momentlerine dik (polar) alan atalet momentleri adı verilir.




z eksenine veya O kutbuna göre dA alanının atalet momenti ise yine tanım gereği $dI_z$ (veya $dI_O$)$=r^2dA$ 'dır. Toplam A alanının z eksenine göre atalet momenti ise,

$I_z$ $(=I_o)$ $=\int r^2dA$ A alanının z eksenine göre polar alan atalet momenti

z ekseni alanı içeren düzleme dik olup bu düzlemi O noktasında kestiği için bu momente O noktasına göre atalet momentine kutupsal (polar) atalet momenti de denir. $r^2=x^2+y^2$ oluğundan $I_o=I_z=I_x+I_y$ bağıntısı geçerlidir.

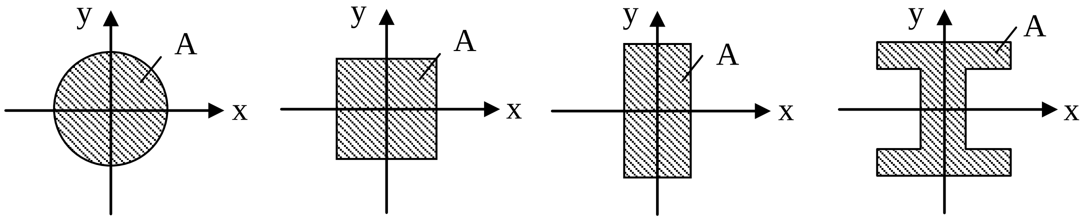
$$( \int r^2dA=\int y^2dA+\int x^2dA )$$

A alanına ait çarpım alan atalet momenti ise, $I_{xy}=\int xydA$

Alan atalet momentlerine ait özellikler:

**1.** Bir alanın $I_o$, $I_x$ , $I_y$ atalet momentleri daima (+) değer alır.
**2.** $I_{xy}$ ise (-), 0 veya (+) olabilir.
**3.** Tüm atalet momentlerinin birimi uzunluk için alınan birimin 4. kuvvetidir ($L^4$).
**4.** Bir alanın sahip olabileceği en küçük atalet momenti değeri bu alanın ağırlık merkezinden geçen eksenlerden birine göre gerçekleşir. Bir alanın bir eksene göre atalet momenti, bu eksen ağırlık merkezinden uzaklaştıkça büyür.

Bir alanın dağılımı, ağırlık merkezinden geçen eksenlere ne kadar yakınsa alanın atalet momenti o kadar küçük olur.




$A=36\ L^2$

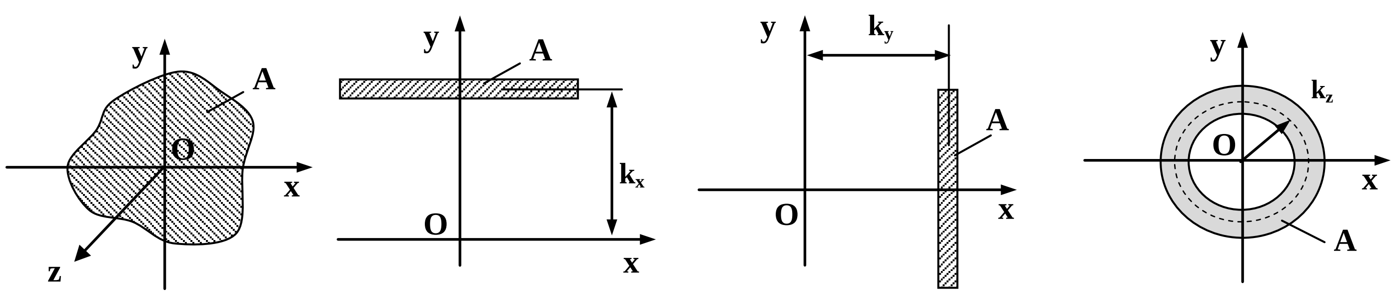
$I_x=103.13\ L^4$ $\quad$ $I_x=108\ L^4$ $\quad$ $I_x=243\ L^4$ $\quad$ $I_x=752\ L^4$

**Bir Alanın Jirasyon (Atalet – Eylemsizlik) Yarıçapı**

x eksenine göre atalet momenti $I_x$ olan A alanının x eksenine göre paralel ince bir şeritte toplandığını varsayalım. Bu şerit alanın x eksenine göre momenti yine $I_x$ ise şerit x ekseninden $I_x=k_x^2A$ bağıntısı ile belirlenecek bir $k_x$ uzaklığına konmalıdır. $k_x$ uzaklığına "alanın x eksenine göre jirasyon yarıçapı" adı verilir. y ve z eksenleri için de benzer şekilde jirasyon yarıçapları elde edilir. $I_x = k_x{}^2A \qquad I_y = k_y{}^2A \qquad I_z = k_z{}^2A$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_z = k_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$$

$$I_x + I_y = I_z \quad \text{olduğundan} \quad k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$



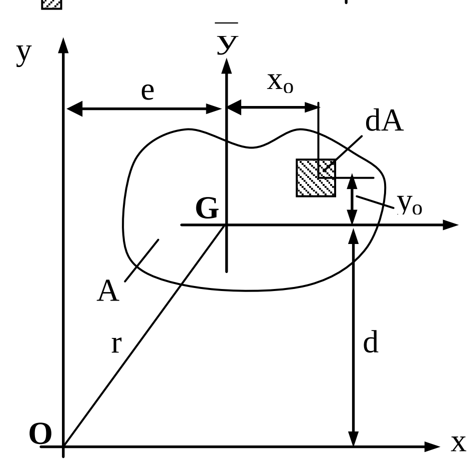

PARALEL EKSENLER (STEINER) TEOREMİ

Eğer herhangi bir eksene göre bir alanın atalet momenti belirlenmiş ise, bu eksene paralel olan başka bir eksene göre alanın atalet momenti Steiner Teoremi ile belirlenebilir:

Şekilde dA elemanter alanın x eksenine göre atalet momenti:

$$dI_x = (y_0 + d)^2 dA$$

Tüm A alanına genişletildiğinde:



$$I_x = \int (y_0 + d)^2 dA = \int y_0^2 dA + 2d\int y_0 dA + d^2 \int dA$$

burada,

$\int y_0^2 dA = \bar{x}$ eksenine göre (ağırlık merkezinden geçen) $\bar{I}_x$ atalet momenti

$$2d\int y_0 dA \;\Rightarrow\; \bar{y} = \frac{\int y_0 dA}{\int dA} \qquad \int y_0 dA = \bar{y}A$$

kütle merkezinin G'den olan uzaklığı (alan merkezinin G'den olan uzaklığı $\bar{y} = 0$), $\quad 2d\int y_0 dA = 0$

$$d^2 \int dA = d^2 A$$

Buna göre, $\quad I_x = \bar{I}_x + Ad^2 \quad$ ve benzer şekilde $\quad I_y = \bar{I}_y + Ae^2 \quad , \quad I_z = \bar{I}_z + Ar^2$

$I_x + I_y = I_z$ olduğundan $\quad \bar{I}_x + \bar{I}_y = \bar{I}_z$

Çarpım atalet momenti, $\quad I_{xy} = \bar{I}_{xy} + Ade$

Paralel eksenler teoremi kullanılırken dikkat edilmesi gerekli iki nokta:

1) İki eksen mutlaka birbirine paralel olmalı
2) Eksenlerden biri mutlaka alanın ağırlık merkezinden geçmelidir.

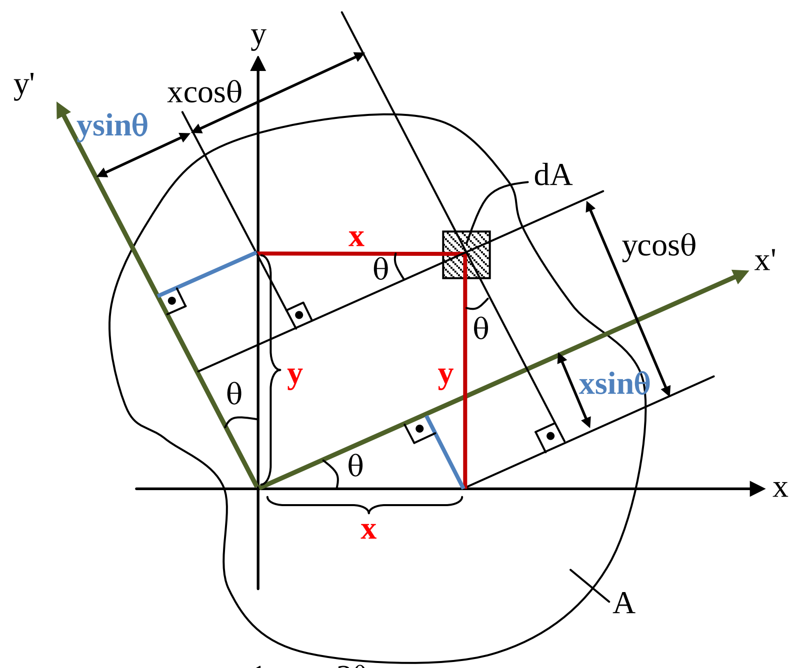
Eğer ele alınan eksenler birbirine paralel ama ikisi de ağırlık merkezinden geçen eksen değil ise bu durumda atalet momenti önce ağırlık merkezinden geçen eksene taşınmalı daha sonra istenen eksene taşınmalıdır.

Paralel eksenler teoremi jirasyon yarıçaplarına da uygulanabilir: $\quad k^2 = \bar{k}^2 + de$

**ASAL ATALET MOMENTLERİ, ASAL ATALET EKSENLERİ VE EKSENLERİN DÖNDÜRÜLMESİ**

Mekanikte sıklıkla belirli bir açıda döndürülmüş bir eksen takımına göre atalet momentlerin hesaplanması istenir.

Çarpım atalet momenti bir alanın eğik düzlemlere göre atalet momentini hesaplamada kolaylık sağlar. Bu yaklaşımdan, momentin maksimum ve minimum olduğu eksenleri belirlemede de yararlanılır.




Şekilden, alanın x' ve y' eksenlerine göre atalet momentleri,

$$I'_x = \int y^2 dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)dA$$

$$I'_y = \int x^2 dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)dA$$

Trigonometrik bağıntılar kullanılarak,

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$I_x$, $I_y$ ve $I_{xy}$ cinsinden,

$$I'_x = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I'_y = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

elde edilir. Benzer şekilde eğik düzlemlere göre çarpım atalet momenti,

$$I'_{xy} = \int x'y'dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)(y\sin\theta + x\cos\theta)dA$$

Trigonometrik bağıntılar, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ve $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ , $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$I_x$, $I_y$ ve $I_{xy}$ cinsinden çarpım atalet momenti,

$$I'_{xy} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

$$I_x + I_y = I'_x + I'_y = I_z$$

$I'_x$ ve $I'_y$ 'yü maksimum ya da minimum yapan açı $I'_x$ veya $I'_y$ 'nün $\theta$'ya göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek bulunur.

$$\frac{dI'_x}{d\theta} = -2\sin 2\theta \frac{I_x - I_y}{2} - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$(I_y - I_x)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta$ , atalet momentini maksimum / minimum yapan bu kritik açıya $\alpha$ dersek,

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \Rightarrow \qquad \tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

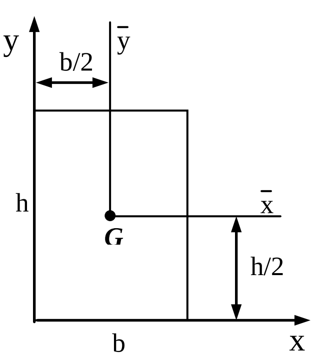
Bu yeni bulunan eksenlere "asal atalet eksenleri" adı verilir. $\alpha$ için iki değer bulunur. Bu değerlerden biri maksimum alan atalet momenti değerini, diğeri ise minimum alan atalet momenti değerini verir.

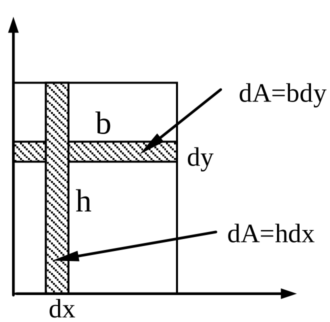
Denklemlere $2\theta$ yerine $2\alpha$ yerleştirildiğinde çarpım atalet momenti $I'_{xy}$ sıfır olur. $I'_x$ ve $I'_y$ ise "asal atalet momentleri" haline gelirler.

$$I_{\substack{maks \\ \min}} = \frac{I_x + I_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}$$

## TEMEL GEOMETRİK ŞEKİLLERİN ALAN ATALET MOMENTLERİ

### 1) DİKDÖRTGEN




$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 b dy = b\int_0^h y^2 dy = \left.\frac{by^3}{3}\right|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

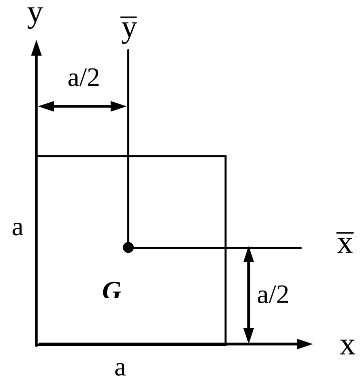
$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 h dx = h\int_0^b x^2 dx = \left.\frac{hb^3}{3}\right|_0^h = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 \qquad d = \frac{h}{2} \qquad \bar{I}_x = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{3} - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ae^2 \qquad e = \frac{b}{2} \qquad \bar{I}_y = I_y - Ae^2 = \frac{hb^3}{3} - bh\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3} \qquad \bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \qquad \bar{I}_y = \frac{hb^3}{12}$$

**2. KARE**




b = h = a olduğundan

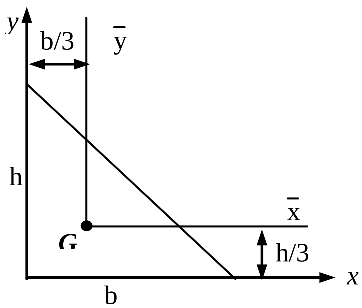
$$I_x = \frac{a^4}{3}$$

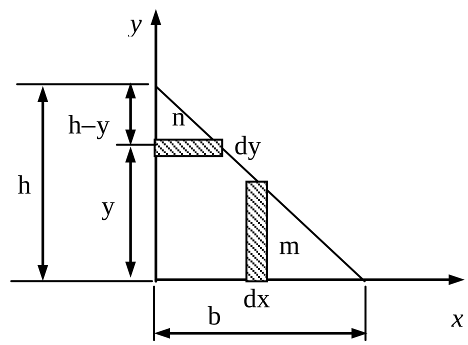
$$I_y = \frac{a^{4\,3}}{3}$$

$$\bar{I}_x = \frac{a^4}{12}$$

$$\bar{I}_y = \frac{a^4}{12}$$

**3. ÜÇGEN**



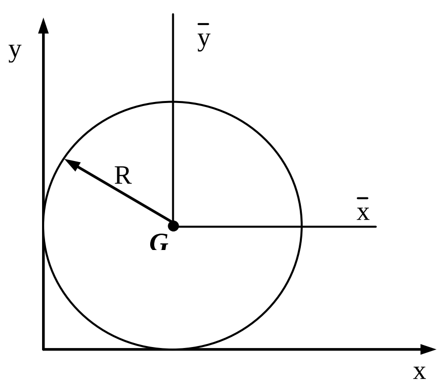

$$I_x = \int y^2 dA \qquad dA = n \cdot dy$$

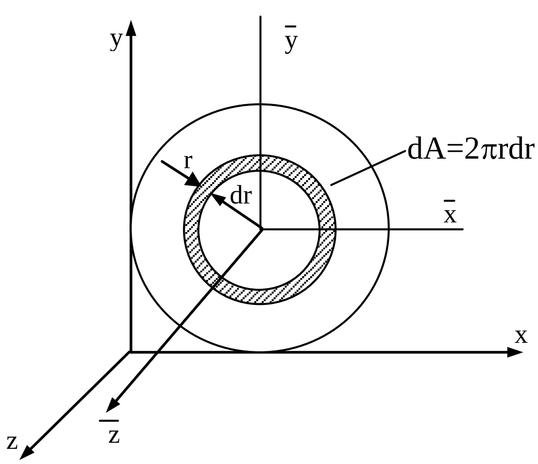
Benzer üçgenlerden, $\frac{n}{h-y} = \frac{b}{h}$ $\quad n = \frac{b}{h}(h-y)$

$$I_x = \int y^2 n dy = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)dy = \frac{by^3}{3}\Big|_0^h - \frac{y^4}{4}\frac{b}{h}\Big|_0^h = \frac{bh^3}{12} \qquad \bar{I}_x = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \int x^2 dA = \frac{hb^3}{12} \qquad \bar{I}_y = I_y - Ae^2 = \frac{hb^3}{36}$$

**4. DAİRE**



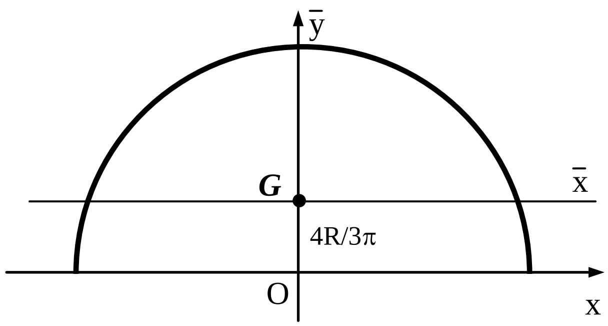
$$\bar{I}_z = \int r^2 dA \qquad dA = 2\pi r dr \qquad \bar{I}_z = \int r^2 2\pi r dr = 2\pi\int_0^R r^3 dr$$

$$\bar{I}_z = 2\pi \frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{2\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\bar{I}_o = \bar{I}_z = \bar{I}_x + \bar{I}_y$$

Simetriden dolayı; $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \dfrac{\pi R^4}{4}$ $\qquad I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = \dfrac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 (R)^2 = \dfrac{5\pi R^4}{4}$ $\qquad I_x = I_y = \dfrac{5\pi R^4}{4}$

**5. YARIM DAİRE**

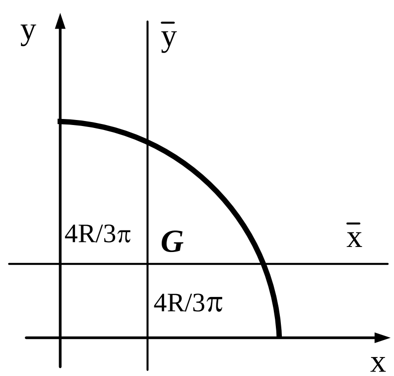



$$I_x = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{2} = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2 = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$$

$$\bar{I}_y = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{2} = \frac{\pi R^4}{8}$$

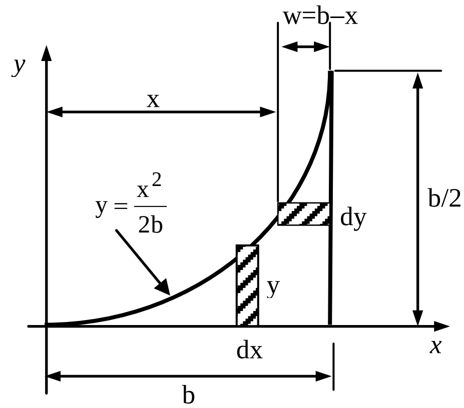
**6. ÇEYREK DAİRE**




$$I_x = I_y = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$

# ALAN ATALET MOMENTİ UYGULAMALARI

*



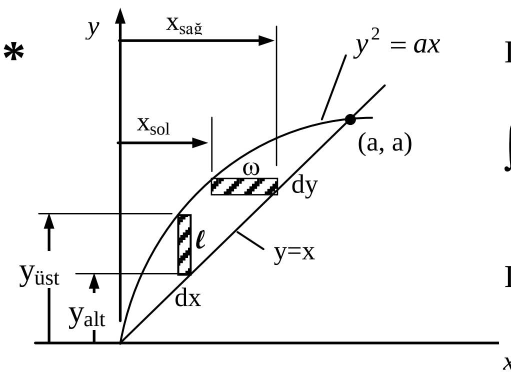

$I_x = ? \qquad I_y = ?$

$$I_x = \int y^2 dA \qquad \int_0^{b/2} y^2\left(b - 2^{1/2}b^{1/2}y^{1/2}\right)dy = \left(\frac{by^3}{3} - \frac{2^{1/2}b^{1/2}y^{1/2}}{7}\cdot 2\right)\Bigg|_0^{b/2}$$

$$I_x = \frac{b\cdot b^3}{3\cdot 2^3} - \frac{2^{1/2}b^{1/2}b^{7/2}\cdot 2}{7\cdot 2^{7/2}} = \frac{b^4}{\underbrace{24}_{7}} - \frac{b^4}{\underbrace{28}_{6}} = \frac{b^4}{168}$$

$$I_y = \int x^2 dA \qquad dA = ydx = \frac{x^2}{2b}dx \qquad I_y = \int_0^b x^2\frac{x^2}{2b}dx = \frac{1}{2b}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^b = \frac{b^4}{10}$$

*

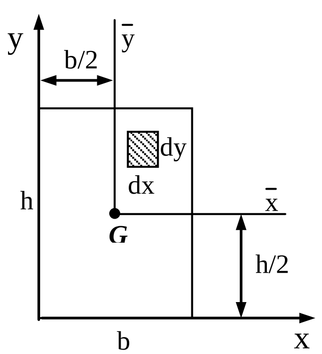



$$I_y = \int x^2 dA \quad , \quad dA = \left(a^{1/2}x^{1/2} - x\right)dx$$

$$\int x^2 dA = \int_0^a x^2\left(a^{1/2}x^{1/2} - x\right)dx = \left(\frac{a^{1/2}x^{7/2}}{7}\cdot 2 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a \Rightarrow \quad I_y = \frac{2a^4}{\underbrace{7}_{4}} - \frac{a^4}{\underbrace{4}_{7}} = \frac{a^4}{28}$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^a y^2\left(y - \frac{y^2}{a}\right)dy = \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5\cdot a}\right)\Bigg|_0^a \Rightarrow \quad I_x = \frac{a^4}{\underbrace{4}_{5}} - \frac{a^4}{\underbrace{5}_{4}} = \frac{a^4}{20}$$

*

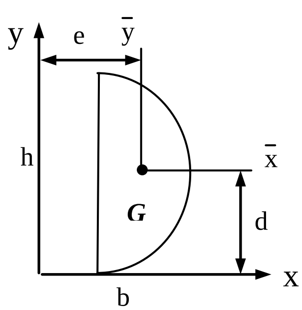



$I_{xy} = ? \qquad I_{xy} = \int xydA \qquad dA = dxdy$

$$I_{xy} = \int_0^b\int_0^h xydxdy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^b \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{b^2h^2}{4}$$

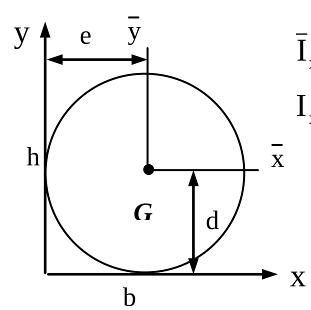
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + Ade \ , \quad \bar{I}_{xy} = I_{xy} - Ade = \frac{b^2h^2}{4} - bh\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right) = 0$$

Eğer ağırlık merkezine ait iki dik eksenden en az biri cismin simetri ekseni ise bu eksenlere göre çarpım atalet momenti sıfır olur.




$$\bar{I}_{xy} = 0$$

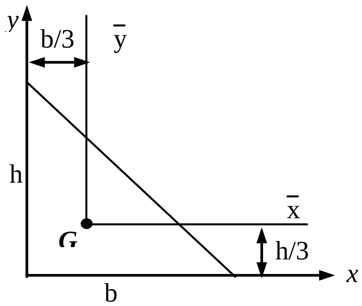
$$I_{xy} = \underbrace{\bar{I}_{xy}}_{0} + Ade$$

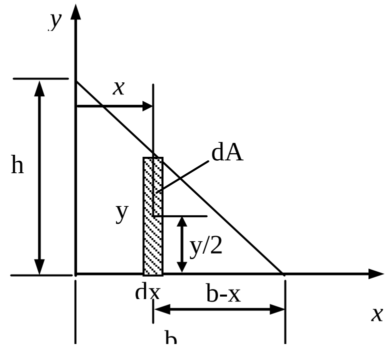



$$\bar{I}_{xy} = 0$$

$$I_{xy} = \underbrace{\bar{I}_{xy}}_{0} + Ade$$

*




$$I_{xy} = ?$$
$$\bar{I}_{xy} = ?$$

$dA = ydx$ , bu alan için $d\bar{I}_{xy} = 0$ ve $dI_{xy} = d\bar{I}_{xy} + dAde$

$$dI_{xy} = ydx(x)\left(\frac{y}{2}\right) = x\frac{y^2}{2}dx \qquad \text{x cinsinden yazılırsa,} \qquad \frac{y}{b-x} = \frac{h}{b} \qquad y = \frac{h(b-x)}{b}$$

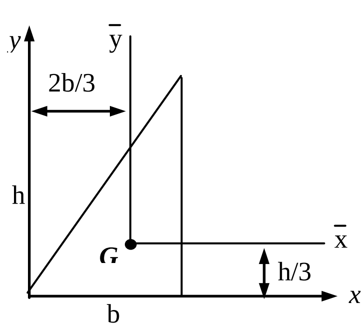
$$y^2 = \frac{h^2}{b^2}\left(b^2 - 2bx + x^2\right)$$

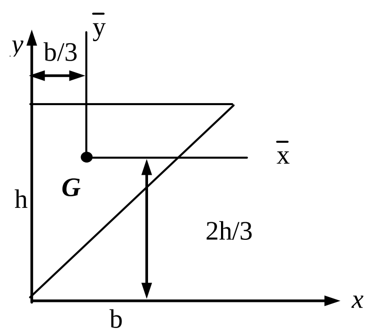
$$\int dI_{xy} = I_{xy} = \int_0^b x\frac{h^2}{2b^2}\left(b^2 - 2bx + x^2\right)dx = \frac{h^2}{2b^2}\left[\frac{b^2x^2}{2} - \frac{2bx^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^b = \frac{h^2}{2b^2}\left(\frac{b^4}{2} - \frac{2b^4}{3} + \frac{b^4}{4}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{h^2b^2}{4}}_{6} - \underbrace{\frac{h^2b^2}{3}}_{8} + \underbrace{\frac{h^2b^2}{8}}_{3} = \frac{h^2b^2}{24}$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - Ade = \frac{h^2b^2}{24} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = \underbrace{\frac{h^2b^2}{24}}_{3} - \underbrace{\frac{h^2b^2}{18}}_{4} = -\frac{h^2b^2}{72}$$

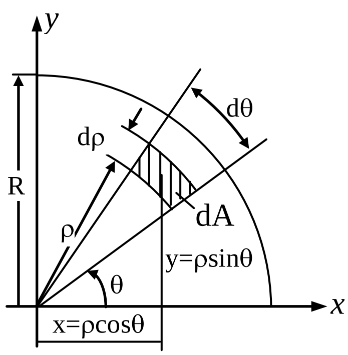
***Farklı konfigürasyonlar için çarpım atalet momentleri***




$$I_{xy} = \frac{h^2b^2}{8} \qquad \bar{I}_{xy} = \frac{h^2b^2}{72}$$

*




$$I_{xy} = ? \qquad \bar{I}_{xy} = ?$$

$$I_{xy} = \int xydA \quad , \quad dA = \rho d\theta d\rho$$

$$I_{xy} = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \rho\cos\theta\rho\sin\theta\rho d\theta d\rho \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta d\theta \qquad \left(\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax\right)$$

$$I_{xy} = \frac{R^4}{8} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{R^4}{16}(-1-1) = \frac{R^4}{8}$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} - Ade = \frac{R^4}{8} - \frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{4R}{3\pi}\right) = \frac{R^4}{8} - \frac{4R^4}{9\pi}$$